

NOTAS DE AULA

DE

CÁLCULO INTEGRAL

LICENCIATURAS- UEMA

Elaborada por :

Raimundo Merval Morais Gonçalves
Licenciado em Matemática / UFMA
Especialista em Ensino de Ciências

São Luís – Ma
AGOSTO / 2012

ÍNDICE

		p.
1.	Diferenciais	03
2.	Integral Indefinida	05
3.	Mudança de Variável	09
4.	Integral Definida	11
5.	Aplicações da Integral Definida	14
	. Cálculo de Áreas	
	. Cálculo de Volumes	
	. Cálculo de Trabalho	
6.	Integração por Partes	21
7.	Substituição Trigonométrica.....	23
8.	Integração de Funções Racionais por Frações Parciais	25
9.	Integração Numérica	26
10.	Integrais Impróprias	30
11.	Tabela de Integrais e Fórmulas de Recorrência	34

DIFERENCIAIS

1. ACRÉSCIMOS

Sejam $y = f(x)$ uma função contínua. Vamos considerar uma variação da variável independente x , de x_1 a x_2 , então definimos o acréscimo de x , denotando por Δx , como : $\Delta x = x_2 - x_1$.

A variação de x origina uma correspondente variação de y , denotada por Δy , dada por :

$$\Delta y = f(x_2) - f(x_1) \quad \text{ou} \quad \Delta y = f(x_1 + \Delta x) - f(x_1)$$

2. DIFERENCIAL

Sejam $y = f(x)$ uma função derivável e Δx um acréscimo de x , definimos:

a) A diferencial da variável independente x , denotada por dx , como $dx = \Delta x$.

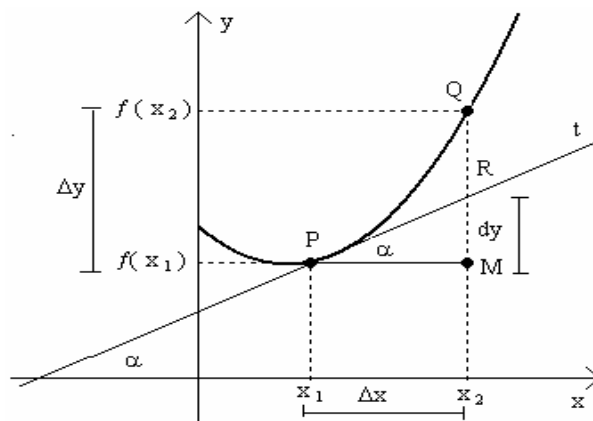
b) A diferencial da variável dependente y , denotada por dy , como $dy = f'(x) \cdot \Delta x$.

Então de acordo com a definição, podemos escrever $dy = f'(x) \cdot dx$ ou

$$\frac{dy}{dx} = f'(x).$$

3. INTERPRETAÇÃO GEOMÉTRICA

Consideremos a figura abaixo, que representa o gráfico de uma função $y = f(x)$ derivável.



A reta (t) é tangente à curva em P e corta a reta $x = x_2$ em R , formando o triângulo retângulo PMR . O coeficiente angular da reta é $f'(x)$ ou $\operatorname{tg} \alpha$. Observando o triângulo PMR , temos:

$$\operatorname{tg} \alpha = f'(x_1) = \frac{\overline{MR}}{\overline{PM}} = \frac{dy}{dx}, \text{ donde concluímos que } dy = \overline{MR} \text{ e } dx = \overline{PM}.$$

Observando a figura vemos que, quando Δx torna-se muito pequeno, o mesmo ocorre com a diferença $\Delta y - dy$, então podemos considerar $\Delta y \cong dy$ desde que Δx seja um valor bem pequeno e resolver alguns exemplos práticos.

Podemos utilizar a reta tangente em um ponto $(a, f(a))$ como aproximação para uma curva $y = f(x)$ quando x está próximo de a . Uma equação desta reta tangente é : $y = f(a) + f'(a)(x - a)$ e a aproximação $f(x) \approx f(a) + f'(a)(x - a)$ é denominada **aproximação linear**.

LISTA DE EXERCÍCIOS

1. Se $y = 3x^2 - 5$, determine a variação Δy para $x = 2$ e $\Delta x = 0,1$.
2. Usando a aproximação por diferenciais, determine uma aproximação para $(2,98)^3$.
3. **Larson.256** – A administração de um parque estadual introduz 50 animais silvestres no parque. A população N da manada pode ser modelada pela função :

$$N = \frac{10(5 + 3t)}{1 + 0,04t}, \text{ onde } t \text{ é o tempo medido em anos. Utilize diferenciais para estimar a}$$

variação do tamanho da manada de $t = 5$ para $t = 6$.

4. **Larson.257** – A concentração C de um medicamento no sangue de um paciente(mg / ml) t horas após uma injeção pode ser modelada pela função :

$$C = \frac{3t}{27 + t^3} . \text{ Utilize diferenciais para estimar a variação da concentração do medica-}$$

mento quando t varia de $t = 1$ para $t = 1,5$.

5. **Tan.230** – O volume de um tumor maligno esférico é dado pela função :

$$V = \frac{4}{3} \pi r^3 . \text{ Se o raio de um tumor está estimado em } 1,1 \text{ cm, com um erro máximo de}$$

medição de $0,005 \text{ cm}$, determine qual o erro que pode ser cometido no cálculo do volume do tumor ?

6. **Anton.231**– Suponha que um caminhão–tanque carregue 60000 litros de álcool etílico a uma temperatura de 35°C e entregue sua carga, mais tarde, a uma temperatura de 15°C . Utilize diferenciais para estimar o volume final da carga sabendo que o coeficiente de dilatação volumétrica do álcool é $\beta = 7,5 \cdot 10^{-4} / ^\circ\text{C}$ e que a variação do volume é dado pela fórmula $\Delta V = \beta V \cdot \Delta T$.

7. **Larson . 261** – A área da superfície corporal(ASC) de uma pessoa de 180cm de altura é modelada por :

$B = 0,1 \cdot \sqrt{5w}$, em B é a ASC da pessoa em metros quadrados e w é peso em quilogramas. Utilize diferenciais para aproximar a variação na ASC da pessoa quando seu peso varia de 90 kg para 95 kg.

8. Suponha que uma colônia de moscas–das–frutas esteja crescendo de acordo coma a função :

$$P(t) = 100 \cdot e^{0,077t} , \text{ onde } t \text{ é medido em dias} .$$

- a) Utilize diferenciais para estimar a taxa de crescimento da colônia quando t varia de 20 a 21 dias.
- b) Quanto tempo levará para colônia ter 800 moscas.

INTEGRAL INDEFINIDA

1. INTRODUÇÃO

A integração tem duas interpretações distintas:

- a) é um procedimento inverso da diferenciação;
- b) é um método usado para determinar a área sob uma curva.

Cada uma destas interpretações tem diversas aplicações. Por exemplo, em Economia, podemos usar a integração para achar uma função **Custo Total** quando é dada a função **Custo Marginal**, ou para a função **Receita Total**, quando é dada a função de **Receita Marginal**; podemos utilizar a integração para calcular **Volumes** de Sólidos de Revolução, **Centros de Massa** e etc.

2. DEFINIÇÃO

Seja f uma função definida num intervalo I . Uma primitiva de f em I é uma função F definida em I , tal que:

$$F'(x) = f(x) \text{ para todo } x \text{ em } I.$$

EXEMPLOS :

a) $F(x) = \frac{x^3}{3}$ é primitiva da função $f(x) = x^2$, pois $F'(x) = x^2$.

b) As funções $G(x) = \frac{x^3}{3} + 4$ e $H(x) = \frac{x^3 + 3}{3}$ também são primitivas de $f(x) = x^2$.

Os exemplos acima mostram que uma mesma função $f(x)$ admite mais de uma primitiva, ou seja, se $F(x)$ é uma primitiva de $f(x)$, então $F(x) + C$ é a **Família** das primitivas de f , onde C é uma **constante arbitrária**.

TEOREMA : Seja $F(x)$ uma primitiva da função $f(x)$. Então, se C é uma constante qualquer, a função $G(x) = F(x) + C$ também é uma primitiva de $f(x)$.

DEMONSTRAÇÃO

Se $F(x)$ é uma primitiva de $f(x)$, a expressão $F(x)$ é chamada **Integral Indefinida** da função $f(x)$ e é denotada por :

$$\int f(x)dx = F(x) + C, \text{ onde :}$$

$$\begin{aligned} \int &\rightarrow \text{sinal de integração} \\ f(x)dx &\rightarrow \text{integrand} \\ f(x) &\rightarrow \text{função integrando} \end{aligned}$$

OBSERVAÇÃO : O diferencial que aparece sob o sinal de integração serve para identificar a variável de integração.

3. PROPRIEDADES DA INTEGRAÇÃO INDEFINIDA

Sejam $f, g: I \rightarrow \mathbb{R}$ e k uma constante, então:

$$a) \int k \cdot f(x)dx = k \cdot \int f(x)dx \quad b) \int [f(x) + g(x)]dx = \int f(x)dx + \int g(x)dx.$$

O processo de integração exige intuição, pois conhecendo a derivada de uma dada função nós queremos descobrir a função primitiva. Mas as seguintes fórmulas nos ajudarão resolver algumas integrais, nestas fórmulas u é uma função diferencial, e C e n são constantes.

$$a) \int du = u + C \quad b) \int u^n du = \frac{u^{n+1}}{n+1} + C, n \neq -1 \quad c) \int \frac{du}{u} = \ln |u| + C \quad d) \int e^x dx = e^x + C$$

EXERCÍCIOS PROPOSTOS : Calcule as seguintes integrais indefinidas.

$$\begin{aligned} a) \int (3x^2 + 4x + 5)dx & \quad b) \int (2x^4 - 5x^3 + 3)dx & \quad c) \int \sqrt{x} dx \\ d) \int x^3 \sqrt{x} dx & \quad e) \int (9t^2 + t^{-3})dt & \quad f) \int (2x^2 - 3)^2 dx & \quad g) \int \frac{dx}{x^3} \end{aligned}$$

4. EQUAÇÕES DIFERENCIAIS COM VARIÁVEIS SEPARÁVEIS

Uma equação do tipo $\frac{dy}{dx} = f(x)$ é chamada **Equação Diferencial**.

Para resolver esse tipo de equação diferencial basta integrar cada um dos diferencial, ou seja :

$$\int \frac{dy}{dx} = \int f(x) \Rightarrow \int dy = \int f(x)dx + C \Rightarrow y = F(x) + C$$

EXERCÍCIOS PROPOSTOS : Resolver as equações diferenciais abaixo:

- a) $\frac{dy}{dx} = 3x^2$ b) $\frac{dy}{dx} = 4x^3 - x$ c) $\frac{dy}{dx} = \frac{2x}{y}$ d) $\frac{dy}{dx} = x^2 \sqrt{y}$
- e) $\frac{dy}{dx} = (x - 2)^4$ f) $\frac{dy}{dx} = x + x^2$ g) $\frac{dy}{dx} = 2xy^2$ h) $\frac{dy}{dx} = \frac{x+1}{y-1}$

5. APLICAÇÃO DE INTEGRAL INDEFINIDA

As equações diferenciais, podem ser utilizadas para resolver alguns problemas de **Física**, **Química**, **Matemática**, etc. Sendo necessário para a solução destes problemas a imposição de uma condição inicial para se calcular o valor de **C** (constante) que aparece após a integração.

EXERCÍCIOS PROPOSTOS :

1. Determine a única função $y = f(x)$, definida em $\mathbb{R}$, tal que:

$$\frac{dy}{dx} = x^2 \quad \text{e} \quad f(0) = 2.$$

2. Uma bola é atirada para cima com uma velocidade inicial de 19,6 metros por segundo a partir de uma altura de 24,5 metros.

- a) Encontre a função posição (s) que representa a altura em função do tempo(t) .
- a) Em que instante a bola atinge o solo ?

3. **Hoffman.308** – Um assado é retirado do freezer e deixado em cima da pia da cozinha para descongelar . A temperatura do assado era de -4°C quando foi retirado do freezer e t horas depois estava aumentando à taxa de $T'(t) = 7e^{-0,35t} \text{ } ^\circ\text{C/h}$.

- a) Escreva uma expressão para a temperatura do assado após t horas .
- b) Qual é a temperatura após 2 horas ?
- c) Suponha que o assado fique totalmente descongelado quando a temperatura atinge 10°C . Quanto tempo o assado leva para descongelar ?

4. **Hoffman.308** – Uma biomassa está variando a uma taxa de $M'(t) = 0,5 + 0,2t \text{ g/h}$. Qual é a variação da biomassa durante a segunda hora ?

5. **Hoffman.308** – Um botânico descobre que um certo tipo de árvore cresce de tal forma que sua altura $h(t)$ após t anos está variando a uma taxa $h'(t) = 0,06t^{2/3} + 0,3t^{1/2}$ metros por ano. Se a árvore tinha 60 cm de altura quando foi plantada, que altura terá após 27 anos ?

LISTA DE EXERCÍCIOS

1. Calcule as integrais abaixo :

$$\begin{array}{llll} \text{a) } \int x^3 \cdot \sqrt{x} \, dx & \text{b) } \int (9t^2 + t^{-3}) \, dt & \text{c) } \int (2x^2 - 3) \, dx & \text{d) } \int \frac{dx}{x^3} \\ \text{e) } \int \frac{x^3 + 1}{x} \, dx & \text{f) } \int (e^x + 4) \, dx & \text{g) } \int \frac{x^5 - x + 1}{x^2} \, dx & \text{h) } \int x^{-4} \, dx \end{array}$$

2. **Tan.399** – A temperatura em um dia, medido no aeroporto de uma cidade, está variando a uma taxa de $T'(t) = 0,15t^2 - 3,6t + 9,2$ ($0 \leq t \leq 4$) $^{\circ}\text{C} / \text{h}$, onde $t = 0$ corresponde às 6 horas da manhã. A temperatura . A temperatura às 6 da manhã era de 21°C .

- a) Encontre uma expressão para a temperatura da cidade em qualquer instante t entre 6 e 10 da manhã.
b) Qual era a temperatura às 10 horas da manhã ?

3. Uma partícula desloca-se com velocidade $v(t) = t + 3$ em M.U.V. Sabe-se que no instante $t = 0$, a partícula encontra-se na posição $s = 2$. Qual a posição da partícula no instante t ?

4. Se C e F denotam leituras Celsius e Fahrenheit, então a taxa de variação de F em relação a C é dada por $\frac{dF}{dC} = \frac{9}{5}$, se $F = 32$ quando $C = 0$. Resolva a equação diferencial para obter uma fórmula geral para F em termos de C

5. Uma epidemia de gripe atinge uma cidade. Seja $P(t)$ o número de pessoas doentes com gripe no instante t , medido em dias a partir do início da epidemia e $P(0) = 100$. Suponha que após t dias a gripe esteja se espalhando a uma taxa de $120t - 3t^2$ pessoas por dia. Encontre a fórmula para $P(t)$.

6. **Tan.400** – O valor médio da concentração de monóxido de carbono(CO) em um dia de verão é de 2 partes por milhão(ppm) Uma agência de proteção do meio ambiente prevê que, caso não se produzam medidas de proteção à atmosfera da cidade, a concentração de CO no ar crescerá a uma taxa de $C'(t) = 0,003t^2 + 0,06t + 0,1$ ppm / ano daqui a t anos. Se nenhuma medida de controle da poluição for adotada, qual será a concentração de CO daqui a cinco anos ?

7. Uma vez que pingos de chuva crescem à medida que caem, sua área superficial cresce e, portanto, a resistência à sua queda aumenta. Um pingo de chuva tem uma velocidade inicial para baixo de 10m/s e sua aceleração para baixo é :

$$a(t) = \begin{cases} 9 - 0,9t, & \text{se } 0 \leq t \leq 10 \\ 0, & \text{se } t < 0 \end{cases}.$$

Se o pingo de chuva estiver inicialmente a 500 m acima do solo, quanto tempo ele levará para cair ?

MUDANÇA DE VARIÁVEL NA INTEGRAL – MÉTODO DA SUBSTITUIÇÃO

1. INTRODUÇÃO

Em geral no cálculo de integrais não é possível aplicarmos a **Tabela de Integrais** decorrente das fórmulas de diferenciação, mas algumas vezes é possível através de uma mudança adequada na variável, podermos utilizar a Tabela de Integrais, conforme veremos através dos exercícios abaixo.

Nesta técnica de integração, escrevemos o integrando em termos de **u** e **du** (ou outra variável qualquer conveniente). Embora esse procedimento envolva mais etapas escritas é bastante útil para integrando complicados. A técnica de mudança de variável usa a notação de **Leibniz** para o diferencial, isto é, se **u = g(x)**, então : **du = g'(x) dx**.

Aqui seguem algumas regras para escolher **u(x)** :

1. Se possível, escolha **u** de tal forma que **u'(x)** seja parte do integrando **f(x)** ;
2. Procure escolher **u** como a parte do integrando que torna a função **f(x)** difícil de integrar diretamente, como um radicando, um denominador ou um expoente ;

EXERCÍCIO PROPOSTO :

1. Calcule as integrais abaixo :

a) $\int (x-4)^{12} dx$

b) $\int (2-3t)^{2/3} dt$

c) $\int 3x^2 \sqrt{1+x^3} dx$

d) $\int \sqrt{2+5y} dy$

e) $\int \frac{3rdr}{\sqrt{1-r^2}}$

f) $\int t^2 (1+2t^3)^{-2/3} dt$

g) $\int \frac{dx}{3x-2}$

h) $\int \frac{(z+1)dz}{\sqrt[3]{z^2+2z+2}}$

i) $\int \frac{2x^4 dx}{x^5+1}$

j) $\int \sqrt{1+t} dt$

k) $\int x^4 \cdot (x^5+3)^7 dx$

l) $\int 9(x^2+3x+5)^8 \cdot (2x+3) dx$

m) $\int \frac{ydy}{\sqrt{2y^2+1}}$

n) $\int \frac{6x+1}{(3x^2+x-2)^3} dx$

o) $\int \frac{x^2}{(1+x^3)^2} dx$

p) $\int e^{-x} dx$

q) $\int 4 \cdot e^{-3x} dx$

r) $\int e^{4x} dx$

2. Uma população de bactérias tem inicialmente 400 bactérias e cresce a uma taxa de $P'(t) = 450268 e^{1,12567t}$ bactérias por hora. Quantas bactérias temos após 3 horas ?

3. Em águas calmas, o petróleo vazando do casco perfurado de um petroleiro forma uma camada de óleo com formato circular. Suponha que o raio(**r**) do círculo está crescendo a uma taxa de :

$$r'(t) = \frac{30}{\sqrt{2t+4}} \text{ pés / min após } t \text{ minutos de o casco ser perfurado.}$$

a) Encontre uma expressão para um raio no instante **t**.

b) Quão grande é área contaminada 16 minutos após a perfurada ?

2. INTEGRAIS TRIGONOMÉTRICAS

Podemos aproveitar as fórmulas de derivação das funções trigonométricas, para obter as fórmulas de integrais para as funções acima citadas e então podemos utilizar em algumas situações o método da substituição, como veremos.

Temos que se u é função diferencial de x , então :

$$a) d(\sin u) = \cos u \, du \Rightarrow \int \cos u \, du = \sin u + C$$

$$b) d(\cos u) = -\sin u \, du \Rightarrow \int \sin u \, du = -\cos u + C$$

$$c) d(\tan u) = \sec^2 u \, du \Rightarrow \int \sec^2 u \, du = \tan u + C$$

$$d) d(\cot u) = -\operatorname{cosec}^2 u \, du \Rightarrow \int \operatorname{cosec}^2 u \, du = -\cot u + C$$

$$e) d(\sec u) = \sec u \cdot \tan u \, du \Rightarrow \int \sec u \cdot \tan u \, du = \sec u + C$$

$$f) d(\operatorname{cosec} u) = -\operatorname{cosec} u \cdot \cot u \, du \Rightarrow \int \operatorname{cosec} u \cdot \cot u \, du = -\operatorname{cosec} u + C$$

EXERCÍCIOS PROPOSTOS :

1. Calcule as seguintes integrais:

$$a) \int \sin 3x \, dx$$

$$b) \int \cos(2x + 4) \, dx$$

$$c) \int x \cdot \sin(2x^2) \, dx$$

$$d) \int \sin 2t \, dt$$

$$e) \int \cos \sqrt{x} \frac{dx}{\sqrt{x}}$$

$$f) \int \cos(3\theta - 1) \, d\theta$$

$$g) \int 4 \cos 3y \, dy$$

$$h) \int 2 \sin z \cdot \cos z \, dz$$

$$i) \int \sin 2x \cdot \cos x \, dx$$

$$j) \int \cos^2 2y \cdot \sin 2y \, dy$$

$$l) \int (1 - \sin^2 3t) \cdot \cos 3t \, dt$$

$$m) \int \frac{\sin x}{\cos^2 x} \, dx$$

$$n) \int \frac{\cos x}{\sin^2 x} \, dx$$

$$o) \int \sin^5 x \cdot \cos x \, dx$$

$$p) \int e^{\sin x} \cdot \cos x \, dx$$

$$q) \int x \cdot \cos 3x^2 \, dx$$

$$r) \int \sin 4t \, dt$$

$$s) \int (2e^{3x} + \sin 5x) \, dx$$

2. Seja uma partícula que se movimenta sobre o eixo dos x com uma velocidade de $v(t) = 2 + \sin 2t$, $t \geq 0$. Sabe-se que no instante $t = 0$ a partícula encontra-se na posição $x = 0$.

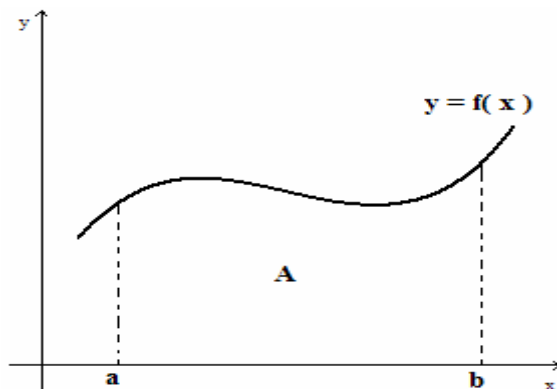
a) Qual a posição da partícula no instante qualquer t ?

b) Qual a posição da partícula no instante qualquer $t = ?$

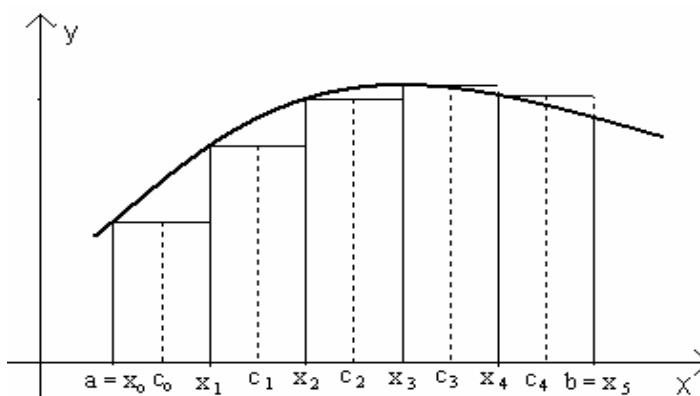
INTEGRAL DEFINIDA

1. SOMA DE REIMANN

Seja calcular a área da curva da figura no intervalo $[a, b]$.



Para calcular esta área devemos dividir o intervalo $[a, b]$ em n sub-intervalos suficientemente pequenos, tal que: $a = x_0 < x_1 < x_2, \dots, x_{n-1} < x_n = b$. Estes sub-intervalos tem comprimento $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$ e altura $f(c_i)$, onde $c_i \in [x_{i-1}, x_i]$. Graficamente temos:



Então a área da curva será aproximadamente.

$$A = (x_1 - x_0) \cdot f(c_1) + (x_2 - x_1) \cdot f(c_2) + \dots + (x_i - x_{i-1}) \cdot f(c_i) + \dots + (x_n - x_{n-1}) \cdot f(c_n)$$

A soma que aparece no 2º membro é chamado da **Soma de Reimann**.

EXERCÍCIO PROPOSTO : Encontre um valor aproximado da área sob a curva $f(x) = 1 + x^2$, considerando $a = 0$, $b = 1$ e $n = 4$, sendo c_i o extremo direito de $[x_{i-1}, x_i]$.

1.1 – DEFINIÇÃO

Seja f uma função definida em $[a, b]$, chama-se **Integral Definida** de f de a até b , denotada por :

$$\int_a^b f(x)dx, \text{ o limite :}$$

$$\lim_{\max \Delta x_i \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(\bar{x}_i) \cdot \Delta x_i, \text{ ou seja: } \int_a^b f(x)dx = \lim_{\max \Delta x_i \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(\bar{x}_i) \cdot \Delta x_i.$$

Se $\int_a^b f(x)dx$ existe, a função f é integrável em $[a, b]$.

OBSERVAÇÃO : Da definição temos ainda que:

$$\int_a^a f(x)dx = 0 \quad \text{e} \quad \int_a^b f(x)dx = - \int_b^a f(x)dx \quad (a < b).$$

2. PROPRIEDADES DA INTEGRAL DEFINIDA

Sejam f, g integráveis em $[a, b]$ e k uma constante. Então:

$$a) \int_a^b [f(x) + g(x)]dx = \int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx$$

$$b) \int_a^b k \cdot f(x)dx = k \cdot \int_a^b f(x)dx$$

$$c) \text{ Se } f(x) \geq 0 \text{ em } [a, b], \text{ então } \int_a^b f(x)dx \geq 0$$

$$d) \text{ Se } c \in (a, b), \text{ então } \int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$$

3. TEOREMA FUNDAMENTAL DO CÁLCULO

TEOREMA 1 : Se f for integrável em $[a, b]$ e se F for uma primitiva de f em $[a, b]$, então :

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a), \text{ onde } F \text{ é qualquer função tal que } F'(x) = f(x) \text{ para todo } x \text{ em } [a, b].$$

4. VALOR MÉDIO DE UMA FUNÇÃO – TEOREMA

Seja f uma função contínua em $[a, b]$, então $f(\bar{x}) = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x)dx$, para algum $\bar{x}$ em

$[a, b]$

LISTA DE EXERCÍCIOS

1. Encontre pela definição de integral de Reimann a área das regiões limitada pelo gráfico de $f(x) = x^2$, o eixo dos x , e as retas $x = 0$ e $x = 1$;

2. Resolva as seguintes integrais:

$$\begin{array}{llll} \text{a) } \int_1^2 x^2 dx & \text{b) } \int_1^3 4x dx & \text{c) } \int_0^2 (x^3 + 3x - 1) dx & \text{d) } \int_1^4 (3x^2 + 5) dx \\ \text{e) } \int_1^2 \frac{1}{x^2} dx & \text{f) } \int_2^3 \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{x^3} \right) dx & \text{g) } \int_1^2 \frac{2s-7}{s^3} ds & \text{h) } \int_1^2 \frac{5}{8x^6} dx \\ \text{i) } \int_1^4 (2 - 9x - 4x^2) dx & \text{j) } \int_0^2 (w^4 - 2w^3) dw & \text{k) } \int_1^4 (x^2 - 4x - 3) dx & \text{l) } \int_0^{\frac{\pi}{3}} (\sin 3x + \cos 3x) dx \end{array}$$

2. **Tan. 437** – A quantidade de um fármaco no corpo de um paciente t dias após ser administrado é de : $C(t) = 5e^{-0,2t}$ unidades. Determine a quantidade média do fármaco no corpo do paciente durante os primeiros quatro dias após sua administração.

R. 3,44 unidades

3. **Tan. 439** – Um grupo de biólogos marinhos estima que, caso medidas de conservação sejam implementadas, a população de uma espécie de baleia ameaçada de extinção será de :

$N(t) = 3t^3 + 2t^2 - 10t + 600$ ($0 \leq t \leq 10$), onde $N(t)$ representa a população ao final de t ano. Encontre a população média de baleias nos próximos dez anos ?

4. Um foguete é lançado verticalmente na atmosfera. Sua velocidade t segundos após o lançamento é $v(t) = 6t + 0,5$ metros por segundo. Encontre a distância percorrida pelo foguete entre os instantes $t = 10$ e $t = 40$ segundos.

5. **Tan.439** – Uma garrafa de vinho à temperatura ambiente (68°F) é colocada em uma geladeira às 4 horas da tarde. Sua temperatura após t horas está variando a uma taxa de : $T'(t) = (-18)e^{-0,6t}$, $^\circ\text{F}$ por hora. Qual será a temperatura da garrafa às 7 da noite ?

R.

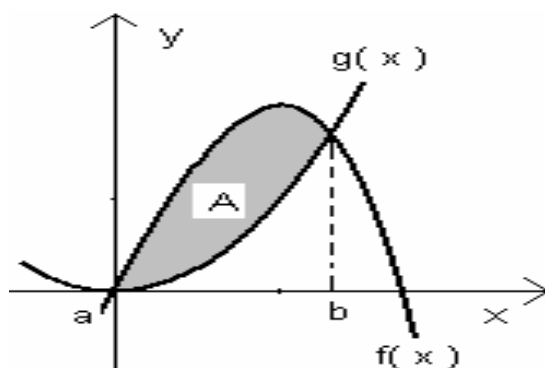
6. **Stewart. 469** – Em uma certa cidade a temperatura(em $^\circ\text{F}$) t horas depois das 9 horas foi aproximada pela função :

$T(t) = 50 + 14\sin\left(\frac{\pi t}{12}\right)$. Calcule a temperatura média durante o período entre 9h e 21h.

APLICAÇÕES DA INTEGRAL DEFINIDA

1. ÁREA DE UMA REGIÃO EM UM PLANO – EQUAÇÕES CARTESIANAS

O cálculo de área de figura planas pode ser feito por integração. Suponhamos que $y_1 = f(x)$ e $y_2 = g(x)$ definam duas funções contínuas em $a \leq x \leq b$ e que $f(x) \geq g(x)$, para $a \leq x \leq b$, então:



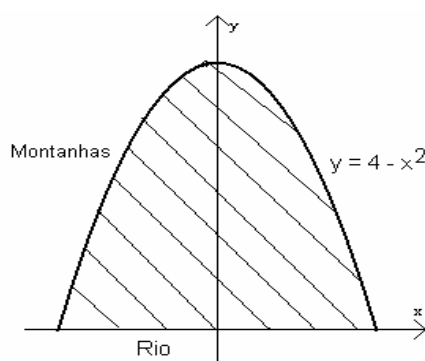
$$A = \int_a^b [f(x) - g(x)] dx$$

EXERCÍCIOS DE FIXAÇÃO

1. Encontre a área limitada pela curva $y = 1 - x^2$ e o eixo x .

R. 4/3

2. As terras ocupadas por um vilarejo estão limitadas em um lado por um rio e nos outros lados por montanhas, formando uma região que quando é modelada com um sistema de coordenadas pode ser representada aproximadamente pela curva $y = 4 - x^2$ (figura), onde x e y estão em quilômetros. Qual é a área ocupada pelo vilarejo?



3. Encontre a área limitada pela curva $y = 2x - x^2$ e pela reta $y = -3$.

R. 32/3

4. Em um estudo realizado em 1999 para o Ministério do Desenvolvimento Econômico de certo país, economistas e especialistas em energia concluíram que se o Projeto de Lei sobre Conservação de Energia fosse implementado em 2000, o consumo de petróleo desse país pelos cinco anos subsequentes crescerá de acordo com o modelo $R_1(t) = 20 \cdot e^{0,05t}$ onde t é medido em anos e $R(t)$ em milhões de barris por ano. Sem essas medidas impostas pelo governo, entretanto, a taxa de crescimento esperada de consumo de petróleo seria dada por $R_2(t) = 20 \cdot e^{0,08t}$ milhões de barris por ano. Utilizando esses modelos, determine quanto petróleo teria sido economizado de 2000 até 2005 se o projeto de lei tivesse sido implementado.

5. Encontre a área limitada por $y = x^2$ e $y = x + 2$.

R. 9/2

6. Encontre a área limitada por $y = 2$ e por $y = x$.

R. 2

7. Encontre a área limitada pelas curvas $y = x^3$ e $y = x$.

R. 1/2

8. **Goldstein.278** – Uma droga é injetada em um paciente a uma taxa de $f(t)$ centímetros cúbicos por minuto no instante t . O que a área sob o gráfico de $y = f(t)$ de $t = 0$ a $t = 4$ representa?

9. Determine a área da região R limitada pelas curvas $y = \sqrt{x}$, $y = -x$, $x = 1$ e $x = 4$.

R. 73/6

10. Determine a área da região R limitada pelas curvas $y = x^2 + 1$ e $y = 5$.

R. 32/3

11. Determine a área da região R limitada pelas curvas $y = 4 - x^2$, $y = -4$.

R. 80/3

12. Determine a área da região R limitada pelas curvas $y^2 = 4 + x$, $y^2 + x = 2$.

R. $8\sqrt{3}$

13. **Goldstein.261** – Uma certa quantidade de alimento é armazenada em um congelador. Passadas t horas a temperatura do alimento está diminuindo a uma taxa de $r(t) = 12 + 4.(t + 3)^{-2}$ °F/h.

a) Calcule a área sob o gráfico de $r(t)$ no intervalo de $0 \leq t \leq 2$.

b) O que a área considerada no item(a) representa?

14. **Larson. 366** – Uma epidemia estava se disseminando de tal forma que em t semanas havia infectado $N_1(t) = 0,1t^2 + 0,5t + 150$, $0 \leq t \leq 50$ pessoas. Vinte e cinco semanas após o início da epidemia, uma vacina foi desenvolvida e aplicada na população. A partir desse momento, o número de pessoas infectadas passa a ser dado pela função $N_2(t) = -0,2t^2 + 6t + 200$. Determine o número de pessoas que não foram infectadas durante a epidemia, graças à vacina.

2. VOLUMES

Uma outra aplicação importante da integral definida consiste na obtenção de volumes de sólidos tridimensionais. Neste item vamos considerar os sólidos de seção reta circular (ou em forma de anel). Tais objetos são denominados **Sólidos de Revolução**. Eles ocorrem com grande frequência em engenharia e na indústria. Alguns exemplos são : eixos, funis, garrafas, pistões, pílulas, etc.

Fazendo-se uma região plana girar em torno de uma reta no plano, obtemos um sólido, que é chamado **Sólido de Revolução**. A reta ao redor da qual a região gira é chamada **Eixo de Revolução**.

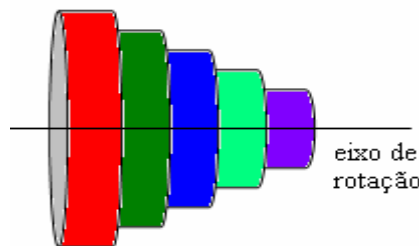
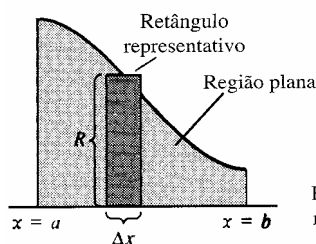
Para calcular o volume destes sólidos de revolução vamos utilizar dois métodos : **Método dos Cilindros** e o **Método das Cascas Cilíndricas**.

2.1 – MÉTODO DOS CILINDROS

Para entender como se utiliza o volume de um cilindro para calcular o volume de qualquer sólido de revolução, considere $y = f(x)$ uma função contínua não negativa em $[a, b]$. Seja R a região sob o gráfico de f de a até b . Considere um retângulo representativo na região R . Ao se girar este retângulo em torno do eixo x , obtém-se um cilindro cujo volume é :

$$\Delta V = \pi \cdot R^2 \cdot \Delta x$$

Ao aproximarmos o volume do sólido por n cilindros de largura Δx e raio $R(x_i)$, teremos : $V \cong \sum_{i=1}^n \pi \cdot [R(x_i)]^2 \cdot \Delta x$.



Tomando o limite quando $\|\Delta\| \rightarrow 0$ ($n \rightarrow \infty$), temos que :

$$V = \lim_{n \rightarrow \infty} \pi \cdot \sum_{i=1}^n [R(x_i)]^2 \cdot \Delta x \Rightarrow V = \pi \cdot \int_a^b [R(x)]^2 dx \text{ ou } V = \pi \cdot \int_a^b [f(x)]^2 dx.$$

É claro que o eixo de rotação também pode ser o eixo dos y ou um eixo paralelo ao eixo dos y , neste caso a fórmula é : $V = \pi \cdot \int_c^d [g(y)]^2 dy$.

Podemos generalizar a fórmula acima para permitir o cálculo de sólidos gerados por duas curvas planas. Neste caso o sólido em questão possui um buraco e portanto substitui-se os cilindros por arruelas e então temos a fórmula :

$$V = \pi \int_a^b ([R(x)]^2 - [r(x)]^2) dx \text{ ou } V = \pi \int_a^b ([f(x)]^2 - [g(x)]^2) dx$$

EXERCÍCIO PROPOSTO : Calcule o volume do sólido gerado pela revolução da curva $y = x^2$ em torno do eixo dos x , com $0 \leq x \leq 1$.

R. $32\pi/5$

2.2 – MÉTODO DAS CASCAS CILÍNDRICAS

O método das cascas cilíndricas consiste em considerar um retângulo representativo de largura(w), altura(h) e cujo centro está a uma distância(p) do eixo de rotação. Girando o retângulo em torno do eixo dos x , obtém-se uma casca cilíndrica(ou tubo), de espessura(w). Para calcular o volume da casca, vamos considerar dois cilindros. O raio do cilindro maior coincide com raio exterior da casca, enquanto o raio do cilindro menor é igual ao raio interior da casca. Como p é o raio médio da casca, temos que os raios exterior e interior são : $R = p + \left(\frac{w}{2}\right)$ e $r = p - \left(\frac{w}{2}\right)$, respectivamente. O volume da casca pode ser calculada pela diferença dos volumes dos dois cilindros, ou seja :

$$V = \pi \cdot \left(p + \frac{w}{2}\right)^2 \cdot h - \pi \cdot \left(p - \frac{w}{2}\right)^2 \cdot h$$

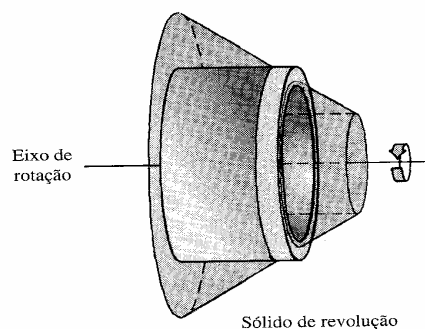
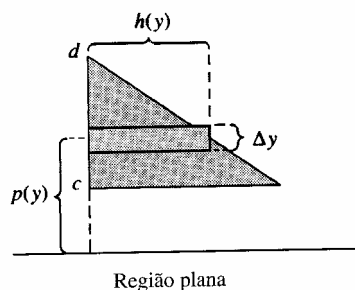
$$V = \pi \cdot 2 \cdot p \cdot h \cdot w = 2 \cdot \pi \cdot (\text{raio médio}) \cdot (\text{altura}) \cdot (\text{espessura})$$

Com esse resultado, podemos calcular o volume de um sólido de revolução do seguinte modo : giramos o retângulo horizontal de largura Δy e obtemos uma casca representativa cujo volume é :

$$\Delta V = 2\pi \cdot [p(y) \cdot h(y)] \cdot \Delta y$$

Aproximando o volume do sólido por n cascas deste tipo, com espessura Δy , altura $h(y_i)$ e raio médio $p(y_i)$, obtemos :

$$V \cong \sum_{i=1}^n 2\pi \cdot [p(y_i) \cdot h(y_i)] \cdot \Delta y.$$



Tomando o limite quando $\|\Delta\| \rightarrow 0$ ($n \rightarrow \infty$), temos que :

$$V = \lim_{n \rightarrow \infty} 2\pi \cdot \sum_{i=1}^n [p(y_i) \cdot h(y_i)] \cdot \Delta y$$

$$V = 2\pi \cdot \int_c^d [r(y) \cdot g(y)] \cdot dy \text{ ou } V = 2\pi \cdot \int_a^b [r(x) \cdot f(x)] \cdot dx.$$

EXERCÍCIO PROPOSTO : Determine o volume do sólido de revolução gerado pela rotação da região delimitada pelas curvas $y = x^2$, $y = 4$ e $x = 0$, no primeiro quadrante, em torno do eixo dos y .

R. 8π

OBSERVAÇÕES :

- 1ª : **Método dos Cilindros** – Para determinar a variável de integração colocamos um retângulo representativo na região plana " **perpendicular** " ao eixo de rotação. Se a largura do retângulo é Δx , integramos em relação a x ; se a largura for Δy , a integração deverá ser em relação a y . O **raio** é a diferença entre as curvas que delimitam a região.
- 2ª : **Método das Cascas** – Para determinar a variável de integração colocamos um retângulo representativo na região plana " **paralelo** " ao eixo de rotação e procedemos como na observação anterior. O **raio** é a distância do centro do retângulo representativo ao eixo de rotação e a **altura** é a diferença entre as curvas que delimitam a região.

EXERCÍCIOS

1. Considere a região plana $y^2 = x$ e $y = x^3$, que se interceptam em $(0, 0)$ e $(1, 1)$. Encontre os volumes, gerados pelas seguintes rotações :

a) em torno do eixo x

b) em torno do eixo y

R. $5\pi/14$; $2\pi/5$

2. **Hoffman.366** – Um tumor tem aproximadamente a mesma forma que um sólido formado pela rotação da região sob a curva $f(x) = \frac{1}{3}\sqrt{16-4x^2}$, em torno do eixo x , onde x e y são medidos em centímetros. Determine o volume do tumor.

R. 15 cm^3

3. Faz-se girar em torno do eixo x a região limitada pelos gráficos de $x^2 = y - 2$, $2y - x - 2 = 0$, $x = 0$ e $x = 1$. Determinar o volume do sólido resultante.

R. $79\pi/20$

4. Determine o volume gerado pela revolução da região descrita no exercício anterior em torno da reta $y = 3$.

R. $51\pi/20$

5. Faz-se girar em torno da reta $x = 3$ a região limitada pelos gráficos de $y = x^2$ e $y = x + 2$. Determine o volume do sólido gerado .

R. $45\pi/2$

6. **Hoffman.368** – Uma tubulação rompida em uma plataforma de petróleo produz uma mancha circular de petróleo que tem T metros de espessura a uma distância r metros da tubulação, onde $T(r) = \frac{3}{2+r}$. No instante em que o vazamento é contido, o raio de mancha é 7 metros. Determine o volume do petróleo derramado.

R. 24 m^3

7. Determinar o volume de um sólido formado pela rotação da região limitada pelas curva $y = x$, $x = 0$ e $y = 2$ em redor do eixo x .

R. $40\pi/3$

8. Determinar o volume do sólido formado pela rotação da região limitada pelas curvas $y = 4 - x^2$, $x = 0$ e $y = 0$, em redor do eixo y .

R. 8π

9. Determinar o volume do sólido formado pela rotação da região limitada $y = x^2$, $y = 0$ e $x = 1$ em redor da reta $x = 2$.

R. $5\pi/6$

10. Determinar o volume do sólido formado pela rotação da região limitada por $y = x^2$, $y = 4$, $x = 0$ em redor da reta $x = 2$.

R. $40\pi/3$

11. Encontre o volume do sólido gerado pela rotação, em torno da reta $y = 1$, da região limitada pelos gráficos de $f(x) = 2 - x^2$ e $g(x) = 1$.

R. $16\pi/15$

12. Encontre o volume do sólido gerado pela rotação, em torno do eixo dos y , da região limitada pelos gráficos de $y = x^2 + 1$, $y = 0$, $x = 1$ e $x = 0$.

R. $3\pi/2$

13. Pretende-se criar uma certa espécie de peixe em um lago. Os nutrientes contidos em 500 metros cúbicos de água do lago são suficientes para alimentar um peixe. O lago tem forma aproximadamente circular, com 20 metros de profundidade no centro e 200 metros de raio. O fundo do lago pode ser modelado pela função $y = 0,0005x^2 - 20$.

a) Qual a quantidade de água existente no lago?

b) Quantos peixes o lago é capaz de sustentar?

INTEGRAÇÃO POR PARTES

1. INTRODUÇÃO

A técnica de **Integração por Partes** se aplica a uma grande variedade de funções e é particularmente útil para integrandos envolvendo produtos de funções algébricas e transcendentais. Por exemplo, integração por partes funciona bem para integrais como :

$$\int x \cdot \ln x \, dx, \int x^2 \cdot e^x \, dx \text{ e } \int e^x \cdot \sin x \, dx.$$

2. INTEGRAÇÃO POR PARTES

Sejam $f(x)$ e $g(x)$ funções deriváveis em um intervalo I , temos :

$$[f(x) \cdot g(x)]' = f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x)$$

$$f(x) \cdot g'(x) = [f(x) \cdot g(x)]' - f'(x) \cdot g(x).$$

Integrando ambos lados da última igualdade acima temos :

$$\int f(x) \cdot g'(x) \, dx = \int [f(x) \cdot g(x)]' \, dx - \int f'(x) \cdot g(x) \, dx$$

$$\int f(x) \cdot g'(x) \, dx = f(x) \cdot g(x) - \int f'(x) \cdot g(x) \, dx, \text{ chamando:}$$

$$u = f(x) \Rightarrow du = f'(x) \, dx \text{ e } v = g(x) \Rightarrow dv = g'(x) \, dx, \text{ logo:}$$

$$\int f(x) \cdot g'(x) \, dx = f(x) \cdot g(x) - \int f'(x) \cdot g(x) \, dx$$

$$\int u \cdot dv = u \cdot v - \int v \cdot du, \text{ que é a fórmula de integração por partes.}$$

Quando usamos a integração por partes, devemos escolher convenientemente **u** e **dv**.

3. MÉTODO TABULAR

Em integrais que envolve a aplicação de repetidas vezes da fórmula de integração por partes, podemos utilizar o método tabular para ajudar a organizar o trabalho, conforme o exemplo abaixo. O método funciona bem para integrais dos tipos :

$$\int x^n \cdot \sin ax \, dx, \int x^n \cdot \cos ax \, dx \text{ e } \int x^n \cdot e^{ax} \, dx$$

EXERCÍCIO RESOLVIDO : Calcule a integral $\int x^2 \cdot \sin x \, dx$.

DERIVADAS DE x^2 : $2x$; 2 e 0

INTEGRAIS DE $\sin x$: $-\cos x$; $-\sin x$ e $\cos x$

$$\text{Então temos : } \int x^2 \cdot \sin x \, dx = -x^2 \cdot \cos x + 2x \cdot \sin x + 2 \cdot \cos x + C$$

EXERCÍCIOS DE FIXAÇÃO

1. Resolva as integrais abaixo :

a) $\int x \cdot e^{2x} dx$

b) $\int \ln x dx$

c) $\int x \cdot \sec^2 x dx$

d) $\int \sin^3 x dx$

e) $\int e^x \cdot \cos x dx$

f) $\int x \cdot e^{-x} dx$

g) $\int x \cdot \sin x dx$

h) $\int x^2 \cdot e^{3x} dx$

i) $\int x^2 \cdot \sin^4 x dx$

j) $\int x \cdot \cos 5x dx$

l) $\int \sin^{-1} x dx$

m) $\int e^{3x} \cdot \cos 2x dx$

n) $\int \frac{x \cdot e^x}{(x+1)^2} dx$

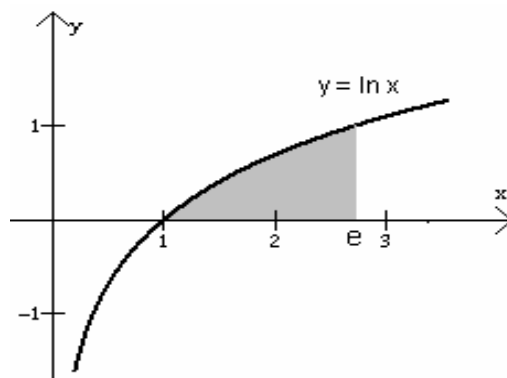
p) $\int_0^1 x^2 \cdot e^x dx$

q) $\int x^3 \cdot \ln x dx$

2. **Hoffman. 390** – A população $P(t)$ de uma colônia de bactérias t horas após a introdução de uma toxina está variando a uma taxa de $P'(t) = (1 - 0,5)e^{0,5t}$ milhares de bactérias por hora. De quanto varia a população durante a quarta hora.

3. A concentração de um medicamento t horas, após ser injetado no sangue de um paciente é dada por $C(t) = 4t \cdot e^{(2 - 0,3t)}$ mg/mL. Qual é a concentração média do medicamento no sangue do paciente durante as primeiras 6 horas após a injeção?

4. Encontre a área da figura abaixo.



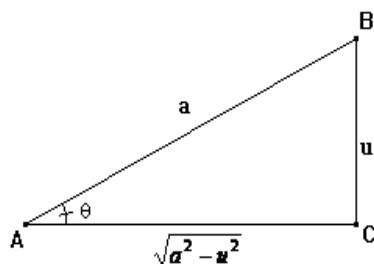
SUBSTITUIÇÃO TRIGONÔMETRICA

1. INTRODUÇÃO

Se o integrando contém funções envolvendo as expressões : $\sqrt{a^2 - u^2}$, $\sqrt{a^2 + u^2}$ ou $\sqrt{u^2 - a^2}$, onde $a > 0$, é possível fazermos uma substituição adequada, nos levando assim à solução da integral.

1.1 – A FUNÇÃO INTEGRANDO ENVOLVE $\sqrt{a^2 - u^2}$.

Neste caso, usamos $u = a \cdot \sin \theta$. Então $du = a \cdot \cos \theta \cdot d\theta$, onde $-\frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$.



EXERCÍCIOS PROPOSTOS :

1. Calcule as integrais abaixo:

a) $\int \frac{dx}{\sqrt{9-x^2}}$

b) $\int \frac{1}{x^2 \sqrt{4-x^2}} dx$

c) $\int \frac{dx}{\sqrt{1-4x^2}}$

d) $\int_0^1 x^4 \sqrt{1-x^2} dx$

e) $\int \frac{x^2}{\sqrt{4-x^2}} dx$

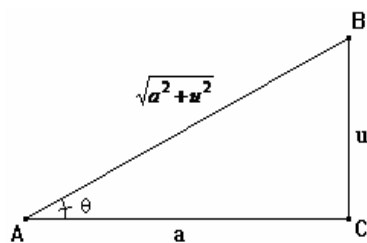
f) $\int \frac{xdx}{\sqrt{4-x^2}}$

g) $\int \sqrt{9-4x^2} dx$

h) $\int \frac{dx}{16-x^2}$

1.2 – A FUNÇÃO INTEGRANDO ENVOLVE $\sqrt{a^2 + u^2}$

Neste caso, usamos $u = a \cdot \tan \theta$. Então, $du = a \cdot \sec^2 \theta \cdot d\theta$, onde $-\frac{\pi}{2} < \theta < \frac{\pi}{2}$.



EXERCÍCIOS PROPOSTOS :

1. Calcule as integrais abaixo:

a) $\int \frac{x dx}{\sqrt{x^2 + 4}}$

b) $\int \frac{dy}{\sqrt{25 + y^2}}$

c) $\int \frac{3dt}{\sqrt{1 + 9t^2}}$

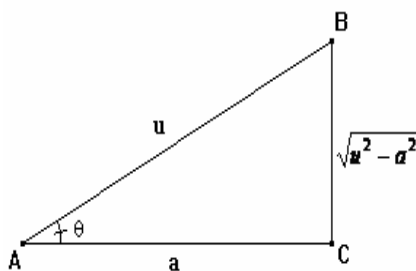
d) $\int \frac{dx}{1 + 4x^2}$

e) $\int \frac{dx}{x\sqrt{9 + x^2}}$

f) $\int \frac{dx}{x^2\sqrt{x^2 + 9}}$

g) $\int \frac{x dx}{x^2 + 16}$

h) $\int \frac{dx}{(36 + x^2)^2}$

2. Encontre o comprimento do arco do gráfico de $f(x) = \frac{1}{2}x^2$ de $x = 0$ até $x = 1$.1.3 – A FUNÇÃO INTEGRANDO ENVOLVE $\sqrt{u^2 - a^2}$.Neste caso, $u = a \sec \theta$, então $du = a \sec \theta \cdot \tan \theta d\theta$, onde $0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$ ou $\pi \leq \theta \leq \frac{3\pi}{2}$.

EXERCÍCIOS PROPOSTOS : Calcule as integrais abaixo:

a) $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 - 4}}$

b) $\int \frac{dy}{y^2\sqrt{y^2 - 16}}$

c) $\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2 - 3}}$

d) $\int_2^4 \sqrt{x^2 - 4} dx$

e) $\int \frac{dx}{(x^2 - 1)^{\frac{3}{2}}}$

f) $\int \frac{dx}{\sqrt{4x^2 - 25}}$

g) $\int \frac{dx}{x^3\sqrt{x^2 - 25}}$

h) $\int x\sqrt{x^2 - 9} dx$

INTEGRAÇÃO DE FUNÇÕES RACIONAIS POR FRAÇÕES PARCIAIS

Esta técnica serve para calcular a integral de qualquer função racional. A idéia é escrever a função dada como uma soma de funções mais simples.

1º CASO : Seja $f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$, onde os fatores de $Q(x)$ são lineares e distintos, ou seja :

$$Q(x) = (x - a_1) \cdot (x - a_2) \cdot (x - a_3) \dots (x - a_n), \text{ então:}$$

$$f(x) = \frac{A_1}{x - a_1} + \frac{A_2}{x - a_2} + \dots + \frac{A_n}{x - a_n}, \text{ onde } A_1, A_2, \dots, A_n \text{ são constantes a determinar.}$$

OBSERVAÇÃO : O grau de $P(x)$ tem que ser menor que o grau de $Q(x)$.

EXERCÍCIOS PROPOSTOS : Calcule as integrais abaixo:

a) $\int \frac{x+3}{x^2-3x+2} dx$

b) $\int \frac{4x^2+13x-9}{x^3+2x^2-3x} dx$

c) $\int \frac{37-11x}{(x-1)(x-2)(x-3)} dx$

d) $\int \frac{5x^2-10x-8}{x^3-4x} dx$

e) $\int \frac{5x-12}{x(x-4)} dx$

f) $\int \frac{dx}{1-x^2}$

2º CASO : Os fatores de $Q(x)$ são lineares sendo que alguns deles se repetem.

Se um fator linear $(x - a_i)$ de $Q(x)$ tem multiplicador r , a esse fator corresponderá uma soma de frações parciais da forma :

$$\frac{B_1}{(x - a_i)^r} + \frac{B_2}{(x - a_i)^{r-1}} + \dots + \frac{B_r}{(x - a_i)}, \text{ onde } B_1, B_2, \dots, B_r \text{ são constantes determinar.}$$

EXERCÍCIOS PROPOSTOS :

1. Calcule as integrais abaixo:

a) $\int \frac{6x+7}{x^2+4x+4} dx$

b) $\int \frac{6x-11}{(x-1)^2} dx$

c) $\int \frac{x^3+3x-1}{x^4-4x^2} dx$

2. Uma organização de defesa do meio ambiente solta 100 animais de uma espécie ameaçada de extinção em uma reserva biológica. A organização acredita que a reserva tenha a capacidade para sustentar 1000 animais e que a manada aumente de acordo com a equação :

$$\int \frac{1}{y(1000-y)} dy = \int k dt, \text{ onde } t \text{ é medido em anos. Determine a função } y \text{ sabendo que para } t = 2$$

temos $y = 134$.

INTEGRAÇÃO NUMÉRICA

1. INTRODUÇÃO

Se uma função $f(x)$ é contínua em um intervalo $[a, b]$ e sua primitiva $F(x)$ é conhecida, então a integral definida desta função neste intervalo é dada por :

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a) \quad \text{❶}, \text{ onde } F'(x) = f(x).$$

Entretanto, em alguns casos, o valor desta primitiva $F(x)$ não é conhecido ou de fácil obtenção, o que dificulta ou mesmo impossibilita o cálculo desta integral.

Por outro lado, em situações práticas, nem sempre se tem a função a ser integrada definida por uma fórmula analítica, e sim por meio de tabela de pontos, o que torna inviável a utilização da equação ❶.

Para se calcular o valor da integral definida de $f(x)$, nas duas situações citadas acima ou em qualquer outra, torna-se necessária a utilização de métodos numéricos que nos dão valores aproximados. Uma dos métodos utilizados já foi visto quando da definição de integral definida que é a Soma de Reimann, mas existem outros métodos ou fórmulas.

Os métodos de integração numérica estão classificados em duas categorias :

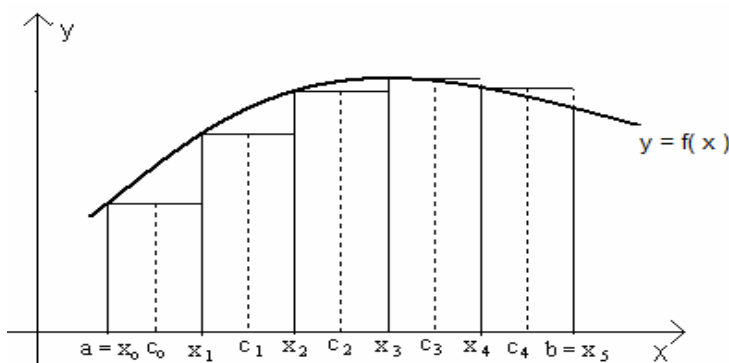
- a) os métodos de Newton - Cotes, que empregam os valores de $f(x)$, onde os valores estão uniformemente espaçados ;
- b) o método da Quadratura Gaussiana, que utiliza os pontos x com espaçamentos distintos.

Para a integração numérica vamos utilizar a Regra do Ponto Médio e as fórmulas de Newton – Cotes. Entre as fórmulas de Newton – Cotes, vamos utilizar as seguintes fórmulas : a regra dos trapézios(simples e repetida) e as regras de Simpson(simples e repetida).

2. REGRA DO PONTO MÉDIO

Seja a função $y = f(x)$ como na figura abaixo vamos calcular a $\int_a^b f(x)dx$. Para isto vamos

dividir o intervalo $[a, b]$ em sub-intervalos de tamanho $\Delta x = \frac{b-a}{n}$ e escolher em cada sub-intervalo $[x_{i-1}, x_i]$ o ponto médio c_i .



Temos então que : $\int_a^b f(x)dx \cong \Delta x \cdot [f(c_0) + f(c_1) + f(c_2) + \dots + f(c_n)]$

3. REGRA DOS TRAPÉZIOS

Uma outra regra muito utilizada é a chamada regra dos trapézios, que possui a seguinte fórmula :

$$I_{\text{TRAP}} = \frac{h}{2} \{ f(x_0) + 2 \cdot [f(x_1) + f(x_2) + \dots + f(x_{m-1})] + f(x_m) \}$$
, onde h é o tamanho do intervalo no qual foi dividido o intervalo de integração.

EXERCÍCIO RESOLVIDO :

1. Calcular a integral $I = \int_3^{3,6} \frac{dx}{x}$ pela regra dos trapézios utilizando 6 intervalos.

SOLUÇÃO :

$$I = \int_3^{3,6} \frac{dx}{x} = \frac{0,1}{2} \cdot \{ 3^{-1} + 2 \cdot (3,1^{-1} + 3,2^{-1} + 3,3^{-1} + 3,4^{-1} + 3,5^{-1}) + 3,6^{-1} \} = 0,05 \cdot 3,6423 \Rightarrow$$

$$I = 0,1823$$

2. Seja $\int_0^1 e^x dx$. Calcule uma aproximação para a integral utilizando 10 subintervalos.

SOLUÇÃO :

$$I = \int_0^1 e^x dx = 0,05 \cdot [e^0 + 2 \cdot (e^{0,1} + e^{0,2} + e^{0,3} + e^{0,4} + e^{0,5} + e^{0,6} + e^{0,7} + e^{0,8} + e^{0,9}) + e^1]$$

$$I = \int_0^1 e^x dx = 1,7197$$

EXERCÍCIO PROPOSTO

1. Resolver as integrais abaixo, utilizando cinco subintervalos.

a) $\int_1^4 \frac{1}{x} dx$

b) $\int_2^3 \ln x dx$

R. 1,42809 ; 0,90868

4. REGRA $\frac{1}{3}$ DE SIMPSON ($n = 2$, $[a, b] = [x_0, x_2]$)

A regra dos trapézios utiliza uma função de 1º grau como aproximação da curva sob a qual queremos encontrar a integral, na a regra de Simpson é utilizado um polinômio de grau 2, assim sendo o número de subintervalos no qual vamos dividir o intervalo $[a, b]$ é par, pois precisamos de três pontos no mínimo para aplicar a fórmula abaixo .:

$$I_S = \frac{h}{3} \{ [f(x_0) + f(x_m)] + 4[f(x_1) + f(x_3) + \dots + f(x_{m-1})] + 2[f(x_2) + f(x_4) + \dots + f(x_{m-2})] \}$$

EXERCÍCIO RESOLVIDO :

1. Seja $\int_1^4 \frac{dx}{x}$. Calcule uma aproximação para a integral utilizando 2 subintervalos.

SOLUÇÃO :

$$I = \int_1^4 \frac{dx}{x} = \frac{1}{2} \cdot [1 + 4 \cdot \frac{2}{5} + \frac{1}{4}] \Rightarrow I = 0,5 \cdot 2,85 \Rightarrow I = 1,425$$

2. Seja $\int_0^1 e^x dx$. Calcule uma aproximação para a integral utilizando a regra de Simpson repetida utilizando 10 subintervalos.

SOLUÇÃO :

$$I = \frac{0,1}{2} [e^0 + e^1 + 4 \cdot [e^{0,1} + e^{0,3} + e^{0,5} + e^{0,7} + e^{0,9}] + 2 \cdot [e^{0,2} + e^{0,4} + e^{0,6} + e^{0,8}]]$$

$$I = \frac{0,1}{2} \cdot (1 + 2,7183 + 34,3084 + 13,5218) \Rightarrow I = 1,7183$$

EXERCÍCIOS PROPOSTOS

1. Seja $\int_0^1 e^x dx$. Calcule uma aproximação para a integral utilizando 2 subintervalos .

R. 1,7189

2. Seja $\int_0^1 \frac{4}{1+x^2} dx$. Calcule uma aproximação para a integral utilizando 2 subintervalos.

R. 3,1334

3. Calcule as integrais abaixo pela regra de Simpson , com quantidade de intervalos indicados.

a) $\int_0^2 e^{x^2} dx$, para $n = 6$

b) $\int_1^4 \frac{1}{x} dx$, para $n = 6$

c) $\int_0^2 x \cdot \sqrt{x^2 + 1} dx$, $n = 4$

R. 15,9 ; 1,3877 ; 3,3917

LISTA DE EXERCÍCIOS

1. O organismo humano absorve um remédio para resfriado a uma taxa dada por :

$C'(t) = 8 - \ln(t^2 - 2t + 4)$, $0 \leq t \leq 12$, onde $C'(t)$ é taxa de absorção em miligramas por hora e t é o tempo em horas. Determine a quantidade total absorvida em 12 horas.

2. A tabela mostra a temperatura média diária medida em um mês de setembro em uma cidade do Brasil .

D	3	6	9	12	15	18	21	24	27	30
T	68	72	72	70	64	60	62	62	56	60

Faça uma estimativa da temperatura média desta cidade utilizando :

a) A regra dos trapézios ;

b) A regra de Simpson

3. Uma fábrica despeja rejeitos em um rio. Os poluentes são levados pela correnteza e 3 horas depois apresentam a distribuição mostrada na tabela abaixo . As medidas, em metros, são tomadas a intervalos de 5 metros. Utilize estas informações e a regra de trapézio para estimar a área da região contaminada.

D	0	5	10	15	20	25	30	35	40	45
P	0	5	7	8	8	5	6	4	3	0

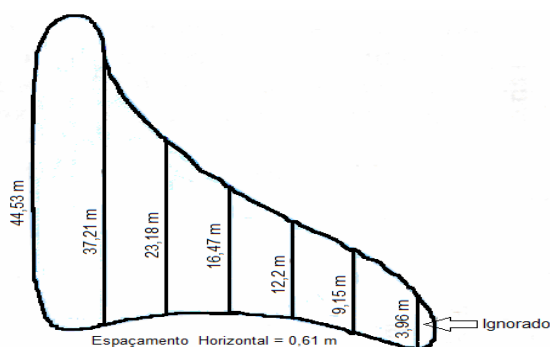
R. I = 235 m²

4. A partir dos dados da tabela abaixo, estimar o valor de $\int_1^5 f(x)dx$, utilizando Simpson .

x	1	1,5	2	2,5	3	3,5	4	4,5	5
y	0	0,41	0,69	0,92	1,1	1,25	1,39	1,5	1,61

R. I = 4,0483

5. Uma cidade quer drenar e preencher um pequeno pântano poluído. O pântano têm a profundidade de 1,60 m . Quantos metros cúbicos de terra aproximadamente serão necessários para preencher a área depois que o pântano for drenado ?



INTEGRAIS IMPRÓPRIAS

1. INTRODUÇÃO

Existem algumas integrais que surgem em problemas de matemática e de outras áreas em que o integrando se torna **Infinito** para um dos limites de integração ou para algum valor que está entre os limites de integração, a estas integrais denominamos **Integrais Impróprias**.

Veremos, então como resolver os diversos tipos de integrais impróprias através de exemplos :

2. DEFINIÇÃO

Uma integral $\int_a^b f(x)dx$ é **Imprópria**, se:

- a) f torna-se infinita em um ou mais pontos do intervalo de integração ou
- b) um ou ambos os limites de integração é infinito.

EXEMPLOS

a) $\int_0^1 \frac{dx}{x}$, a integral torna-se infinita em $x = 0$

b) $\int_0^3 \frac{dx}{(x-1)^{\frac{2}{3}}}$, a integral torna-se infinita em $x = 1$

c) $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^2}$, a integral possui um dos limites infinito

d) $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{4+x^2} dx$, a integral possui os limites infinitos.

3. CÁLCULO DA INTEGRAL IMPRÓPRIA

Seja a integral imprópria $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^2} dx$, em que um dos limites de integração é infinito, então para resolvermos, tomamos como limites da integração $x = 1$ e $x = b$, onde b é um número qualquer que tende ao infinito, então podemos escrever que :

$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^2} dx = \lim_{b \rightarrow +\infty} \int_1^b \frac{1}{x^2} dx . \text{ Se este limite existir será o valor da integral}$$

Então para calcularmos o valor de uma integral imprópria, substituímos o ponto ou os pontos do intervalo de integração por um outro valor qualquer que esteja bem próximo do mesmo e calculamos o limite da integral.

OBSERVAÇÕES

1. Quando o limite da integral **existe** e é **finito** dizemos que a integral imprópria converge.
2. Quando o limite da integral **não existe** ou é **infinito**, então dizemos que a integral diverge.

3. A integral imprópria $\int_1^{\infty} \frac{dx}{x^p} = \begin{cases} \frac{1}{p-1}, & \text{se } p > 1 \\ \text{diverge}, & \text{se } p \leq 1 \end{cases}$.

EXERCÍCIOS DE FIXAÇÃO

1. Calcule as integrais abaixo:

a) $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^2} dx$	b) $\int_0^1 \sqrt{\frac{1+x}{1-x}} dx$	c) $\int_0^3 \frac{dx}{(x-1)^{\frac{2}{3}}}$	d) $\int_1^{\infty} \frac{1}{x^{\frac{4}{3}}} dx$	e) $\int_{-\infty}^0 e^x dx$
f) $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$	g) $\int_0^4 \frac{dx}{\sqrt{4-x}}$	h) $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx$, onde, $f(x) = \begin{cases} 1, & \text{se } x \leq 1 \\ 0, & \text{se } x > 1 \end{cases}$		

2. A duração da vida de uma espécie de planta (em dias) é descrita pela função densidade de probabilidade

$$f(x) = \frac{1}{100} e^{-\frac{x}{100}} \text{ para } 0 \leq x \leq \infty.$$

- a) Encontre a probabilidade de que uma planta dessa espécie viva 100 dias ou menos .
- b) Determine a probabilidade de que uma planta dessa espécie viva 120 dias ou mais.
- c) Encontre a probabilidade de que uma planta dessa espécie viva ao menos 60 dias, mas menos que 140 dias.

3. Certo sinal luminoso de trânsito permanece fechado (vermelho) por 40 segundos a cada vez. Um motorista chega quando o sinal está vermelho. Calcule, através de uma função densidade uniforme adequada, a probabilidade de o motorista ter que esperar pelo menos 15 segundos até a luz verde aparecer.

4. Seja a função densidade de probabilidade da duração das chamadas telefônicas em uma determinada cidade, onde x indica a duração (em minutos) de uma chamada aleatoriamente escolhida. Determine a probabilidade de uma chamada escolhida ao acaso durar pelo menos:

- a) de 2 a 3 minutos

- b) 2 minutos

$$f(x) = \begin{cases} 0,5e^{-0,5x}, & x \geq 0 \\ 0, & \text{se } x < 0 \end{cases}$$

R. 0,1447 ; 0,3679

TABELA DE INTEGRAIS

$$1. \int u^n du = \frac{u^{n+1}}{n+1} + C, n \neq -1$$

$$2. \int \frac{du}{u} = \ln |u| + C$$

$$3. \int e^{\alpha x} dx = \frac{1}{\alpha} e^{\alpha x} + C$$

$$4. \int u^n \cdot e^u du = u^n \cdot e^u - n \cdot \int u^{n-1} \cdot e^u du$$

$$5. \int \sin(\alpha x) dx = -\frac{1}{\alpha} \cos(\alpha x) + C$$

$$6. \int \cos(\alpha x) dx = \frac{1}{\alpha} \sin(\alpha x) + C$$

$$7. \int \ln u du = u \cdot \ln u - u + C$$

$$8. \int u^n \ln u du = u^{n+1} \cdot \left[\frac{\ln u}{n+1} - \frac{1}{(n+1)^2} \right] + C$$

$$9. \int \frac{du}{u \cdot \ln u} = \ln |\ln u| + C$$

$$10. \int \frac{du}{a^2 + u^2} = \frac{1}{a} \arctan \frac{u}{a} + C; a > 0$$

$$11. \int \frac{du}{\sqrt{a^2 - u^2}} = \arcsin \frac{u}{a} + C, a > 0$$

$$12. \int \frac{du}{u \cdot \sqrt{u^2 - a^2}} = \frac{1}{a} \operatorname{arcsec} \frac{|u|}{a} + C, a > 0$$

$$13. \int \sin^n u du = -\frac{1}{n} \sin^{n-1} u \cdot \cos u + \frac{n-1}{n} \int \sin^{n-2} u du$$

$$14. \int \cos^n u du = \frac{1}{n} \cos^{n-1} u \cdot \sin u + \frac{n-1}{n} \int \cos^{n-2} u du$$

$$15. \int u^n \cdot \sin u du = -u^n \cos u + n \int u^{n-1} \cdot \cos u du$$

$$16. \int u^n \cdot \cos u du = u^n \sin u - n \int u^{n-1} \cdot \sin u du$$

$$17. \int \sin^m u \cdot \cos^n u du = -\frac{1}{m+n} \sin^{m-1} u \cdot \cos^{n+1} u + \frac{m-1}{m+n} \int \sin^{m-2} u \cdot \cos^n u du, \text{ onde } m \text{ ou } n \text{ é um número inteiro não negativo ímpar.}$$

$$18. \int \sin^m u \cdot \cos^n u du = \frac{1}{m+n} \sin^{m+1} u \cdot \cos^{n-1} u + \frac{n-1}{m+n} \int \sin^m u \cdot \cos^{n-2} u du, \text{ onde } m \text{ e } n \text{ são números inteiros não negativos pares.}$$

$$19. \int \operatorname{tg}^n u du = \frac{1}{n-1} \operatorname{tg}^{n-1} u - \int \operatorname{tg}^{n-2} u du, \text{ para } n \neq 1$$

$$20. \int \operatorname{cotg}^n u du = -\frac{1}{n-1} \operatorname{cotg}^{n-1} u - \int \operatorname{cotg}^{n-2} u du, \text{ para } n \neq 1$$

$$21. \int \sec^n u du = \frac{1}{n-1} \sec^{n-2} u \cdot \operatorname{tg} u + \frac{n-2}{n-1} \int \sec^{n-2} u du, \text{ para } n \neq 1$$

$$20. \int \operatorname{cosec}^n u du = -\frac{1}{n-1} \operatorname{cosec}^{n-2} u \cdot \operatorname{cotg} u + \frac{n-2}{n-1} \int \operatorname{cosec}^{n-2} u du, \text{ para } n \neq 1$$

$$22. \int e^{\alpha u} \cdot \sin(\beta u) du = \frac{e^{\alpha u}}{\alpha^2 + \beta^2} (\alpha \cdot \sin \beta u - \beta \cdot \cos \beta u) + C$$

$$23. \int e^{\alpha u} \cdot \cos(\beta u) du = \frac{e^{\alpha u}}{\alpha^2 + \beta^2} (\alpha \cdot \cos \beta u + \beta \cdot \sin \beta u) + C$$

BIBLIOGRAFIA CONSULTADA

ANTON, Howard , **BIVENS** Irl e **DAVIS**, Stephen – Cálculo . volume 1 . Editora Bookman . 8ª Edição . 2007, Porto Alegre

FLEMING, Diva Marília e **GONÇALVES**, Míriam Boss – CÁLCULO A . volume único . Editora MAKRON . 6ª Edição . 2006, São Paulo.

HOFFMANN, Laurence D. – CÁLCULO : Um Curso Moderno e suas Aplicações . volume único . Editora LTC . 9ª Edição . 2008, Rio de Janeiro

IEZZI, Gelson et alli – Fundamentos de Matemática Elementar . volume 08 . Editora Atual . 6ª Edição . 2005, São Paulo.

LARSON Ron e **EDWARDS**, Bruce H . – Cálculo com Aplicações . volume único . Editora LTC . 6ª Edição . 2005, Rio de Janeiro

LARSON, Ron – Cálculo Aplicado : Curso Rápido . volume único . Editora CENGAGE Learning . 8ª Edição, 2011, São Paulo.

SWOKOWSKI, Earl W – Cálculo com Geometria Analítica . volume 01 . Editora MAKRON . 1983, São Paulo.

TAN, S.T – Matemática Aplicada . volume único . Editora CENGAGE Learning . 2ª Edição . 2007 , São Paulo

THOMAS, George ; **FINNEY**, Ross L ; **MAURICE**, Weir e **GIORDANO**, Frank – CÁLCULO . volume 1 . Editora LTC . 10ª Edição . 2002, São Paulo

Disponível em : www.ime.uerj.br/ensinoepesquisa/publicacoes