NOTAS DE AULA

DE

FUNÇÕES DE VÁRIAS VARIÁVEIS

CIÊNCIAS – UEMA

Elaborada por :

Raimundo Merval Morais Gonçalves
Licenciado em Matemática/UFMA
Professor Assistente/UEMA
Especialista em Ensino de Ciências/UEMA

São Luís – Ma
AGOSTO / 2011

ÍNDICE

FUNÇÕES DE VÁRIAS VARIÁVEIS

1. INTRODUÇÃO

Vamos estender o conceito de função a funções de mais de uma variável independente. Tais funções ocorrem frequentemente em situações práticas. Por exemplo, a área aproximada da superfície do corpo de uma pessoa depende do seu peso e altura. O volume de um cilindro circular reto depende de seu raio e a altura. De acordo com a lei do gás ideal, o volume ocupado por um gás confinado é diretamente proporcional à sua temperatura e inversamente proporcional à sua pressão. O custo de um determinado produto pode depender do custo do trabalho, preço de materiais e despesas gerais.

Para ampliar o conceito de função a funções de um número qualquer de variáveis, precisamos primeiro considerar pontos num espaço numérico n-dimensional. Da mesma forma que denotamos um ponto em $\mathbb{R}$ por um número real x, um ponto em $\mathbb{R}^2$ por um par ordenado de números reais (x, y) e um ponto em $\mathbb{R}^3$ por um tripla ordenada de números reais (x, y, z), um ponto do espaço n-dimensional, $\mathbb{R}^n$, é representado por uma ênupla de números reais, sendo comumente denotado por $P = (x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n)$

2. FUNÇÕES DE DUAS VARIÁVEIS

DEFINIÇÃO : Uma função de duas variáveis reais a valores reais é uma função $f : A \to B$, onde $A \subset \mathbb{R}^2$. Uma tal função associa a cada par (x, y) $\in$ A, um único número $f(x, y) \in \mathbb{R}$. O **domínio** é todo o plano xy ou parte dele.

EXEMPLOS :

a) $f(x, y) = x^2 - 2xy$ b) $g(x, y) = x - y^2$ c) $z = x^2 + y^2$

OBSERVAÇÃO : Quando os valores de uma função são dados por uma fórmula e não descrevemos explicitamente o **Domínio** da função, admitimos que o domínio consista de todos os pontos (x, y) para os quais a fórmula é definida.

2. 1 – GRÁFICO

O gráfico de uma função $f(x, y)$ é uma superfície que representa o conjunto de pontos $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ para os quais $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ (domínio) e $z = f(x, y)$.

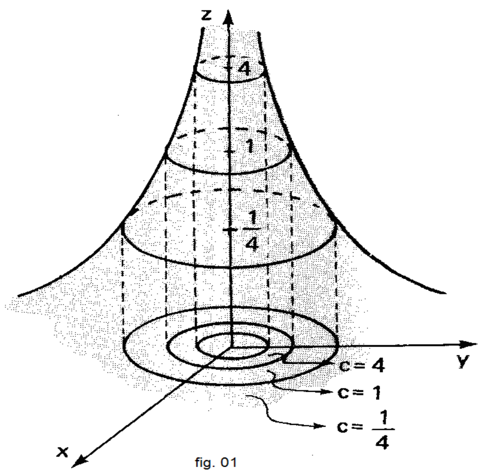


fig. 01

$$z = \frac{1}{x^2 + y^2}$$

2.2 – CURVAS DE NÍVEL

A representação geométrica de uma função de duas variáveis não é tarefa fácil. Então quando se pretende ter visão geométrica da função, utiliza-se as suas curvas de nível, por ser mais fácil de se obter a sua representação geométrica.

Uma curva de nível de uma função $f(x, y)$ é a curva $f(x, y) = \mathbf{c}$ ($\mathbf{c}$ = cte) no plano xy, logo a curva de nível consiste dos pontos $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ onde a função tem valor **c** .

3. FUNÇÕES DE TRÊS VARIÁVEIS

DEFINIÇÃO : Uma função de três variáveis reais, definida em $A \subset \mathbb{R}^3$, é uma função que associa, a cada terno $(x, y, z) \in A$, um único número real $w = f(x, y, z) \in \mathbb{R}$. O **domínio** é todo o $\mathbb{R}^3$ ou parte dele.

EXEMPLOS :

a) $f(x, y, z) = x^2 + 2xy - z$ b) $g(x, y, z) = 2x^2 + y^2 - z^3$ c) $w = x^2 - 3z^2 + y$

3. 1 – SUPERFÍCIES DE NÍVEL

O gráfico de uma função de três variáveis é um subconjunto do espaço de quatro dimensões e, como tal, não temos a possibilidade de representá-lo em um desenho. Dizemos que se trata de uma **hipersuperfície** de $\mathbb{R}^4$.

De modo geral, o gráfico de uma função $f : A \to \mathbb{R}$, onde $A \subset \mathbb{R}^n$ é uma hipersuperfície do espoco $\mathbb{R}^{n+1}$.

Como já foi dito não é possível visualizar o gráfico de uma função de três variáveis, pois o gráfico é em 4 dimensões. Em vez disso, consideramos suas **Superfícies de Nível**. Uma superfície de nível de $f(x, y, z)$ é uma superfície $f(x, y, z) = \mathbf{c}$ no $\mathbb{R}^3$, onde a função tem valor constante.

EXERCÍCIOS PROPOSTOS

1. Seja a função definida por $f(x , y) = -1 + 3x^2\sqrt{y}$. Determine :

a) Domínio de f ; b) $f(1, 4)$ c) $f(0, 9)$ d) $f(1, -1)$

2. Determinar as superfícies de nível da função $w = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$. Dar exemplos de três pontos pertencentes ao gráfico de w .

3. Determinar o domínio e descrever o mesmo das funções :

a) $f(x, y) = \ln (x^2 - y)$ b) $f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2 - 4}$

c) $f(x, y, z) = \ln (16 - 4x^2 - 4y^2 - z^2)$ d) $f(x, y) = \dfrac{\sqrt{y - x^2}}{1 - x^2}$

LISTA DE EXERCÍCIOS

1. Encontrar uma função de várias variáveis que nos dê :

a) O volume de água necessário para encher uma piscina redonda de x metros de raio e y metros de altura.

b) A temperatura nos pontos de uma esfera, se ela, em qualquer ponto, é numericamente igual a distância do ponto ao centro da esfera .

2. Seja a função $g(x, y) = \sqrt{x^2 - y}$. Calcule a imagem dos pontos abaixo .

a) P(3, 5)   b) M(– 4 , – 9)   c) T(x + 2 , 4x + 4)

R. 2 ; 5

3. Esboce o gráfico das funções abaixo :

a) $f(x, y) = x + y - 4$ b) $g(x, y) = x^2 + y^2$

c) $h(x, y) = \sqrt{25 - x^2 - y^2}$ d) $f(x, y) = 1 - x^2 - y$

4. Encontre o domínio e conjunto imagem das funções de duas variáveis abaixo .

a) $f(x, y) = \dfrac{1}{\sqrt{x - y}}$ b) $g(x, y) = \ln(xy - 1)$ c) $z = \sqrt{x + y}$

d) $g(x, y) = x^2 + y^2 - 2$ e) $f(x, y) = e^{x^2 + y^2}$ g) $h(x, y) = \sqrt{9 - x^2 - y^2}$

5. Trace algumas curvas de nível das funções abaixo:

a) $f(x, y) = x - 2y$ b) $g(x, y) = x^2 + y$ c) $f(x, y) = y \cdot \operatorname{sen} x$

d) $z = x \cdot y$ e) $h(x, y) = x^2 + y^2 - 9$

6. Encontre o domínio das funções abaixo :

a) $f(x, y, z) = 2x + y + z^2$ b) $g(x, y, z) = \ln(x^2 + y^2 - 4)$

c) $f(x, y, z) = \dfrac{1}{x} + y \cdot z$ d) $f(r, s, v, p) = rs^2 + \operatorname{tg} v + 4sv$

e) $h(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2 - 9}$ f) $h(x, y, z) = \dfrac{1}{5 - x^2}$

7. Dada a função $h(x, y) = \sqrt{25 - x^2 - y^2}$.

a) Determine o seu domínio e o represente no plano xy;

b) Escreva a equação da curva de nível **c = 4** e a represente no plano xy.

8. A temperatura do ponto P(x, y) de uma chapa é dada por $T(x, y) = 2x^2 + y^2 - 6$. Determine a equação da isoterma que passa pelo ponto A(1, 4) e a represente no plano xy.

9. O potencial elétrico em uma região do plano xy é dado por $V(x, y) = \dfrac{120}{x^2 + y^2}$ (V é medido em volts) .

a) Qual é o lugar geométrico dos pontos cujo potencial é 30 volts?

b) Determine a curva equipotencial que passa pelo ponto P(1, 1).

10. Seja R(x, y) = 2x + 3y a receita de vendas de dois produtos de qualidades x e y. Esboce o gráfico dos (x, y) para os quais R = 120, tal curva é chamada em Economia de iso–receita.

11. Sejam **x** e **y** as quantidades vendidas de dois produtos, cujos preços unitários são R$ 10,00 e R$ 30,00 respectivamente.

a) Determine a função receita R(x, y) ; b) Calcule R(20, 40) ;

c) Represente graficamente os pares para os quais R = R$ 1200,00.

R. b) R$ 1400,00

12. Seja $f(x, y) = 3x + 2y$. Calcule:

a) $f(1, -1)$ b) $\dfrac{f(x+h, y) - f(x, y)}{h}$

R . a) 1 e b) 3

13. Considere a função f dada por $f(x, y) = \dfrac{y}{x - 1}$.

a) Determine o conjunto domínio e o conjunto imagem da função ;

b) Esboce algumas curvas de nível da função.

14. **Hughes – 299**. A temperatura ajustada pelo fator vento(sensação térmica) é a temperatura que você sente como resultado da combinação do vento e da temperatura , conforme tabela 2 .

a) Se a temperatura é de 0º C e a velocidade do vento é de 15 km/h, que temperatura você sente ?

b) Se a temperatura é de 35º C e a velocidade do vento é de 15 km/h, que temperatura você sente ?

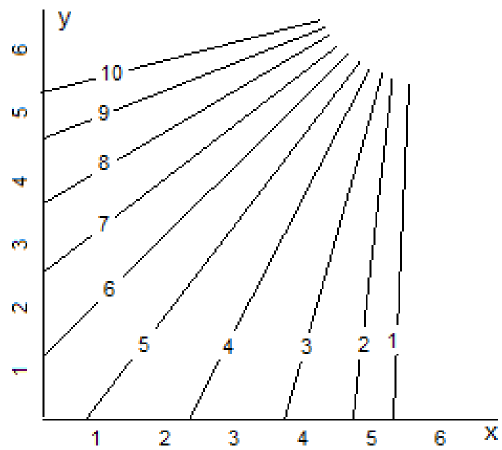
Temperatura (° C)

Velocidade do vento (km/h)	35	30	25	20	15	10	5	0
5	33	27	21	16	12	7	0	-5
10	22	16	10	3	-3	-9	-15	-22
15	16	9	2	-5	-11	-18	-25	-31
20	12	4	-3	-10	-17	-24	-31	-39
25	8	1	-7	-15	-22	-29	-36	-44

Tabela 2

15. **Hughes – 306** . Esboce um diagrama de curvas de nível correspondente à função C (d, m) = 40d + 0,15m. Inclua curvas de nível com os valores C = 50, C = 100, C = 150 e C =200.

16. **Hughes – 306 .** A figura abaixo representa as curvas de nível da função z = f(x, y). A função z é crescente ou decrescente em relação à variável x ? E em relação à variável y ?

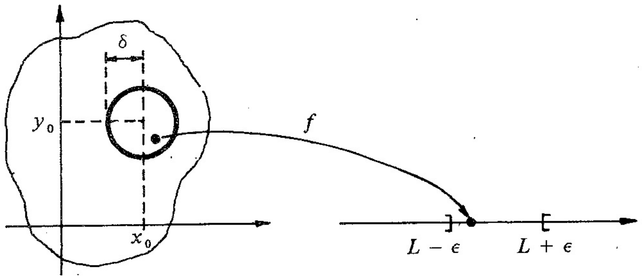


LIMITES E CONTINUIDADE

1. INTRODUÇÃO

Enquanto um ponto variável **x** num eixo coordenado pode se aproximar de um ponto fixo x_o por apenas dois sentidos, um ponto variável (x, y) num plano coordenado pode se aproximar de um ponto fixo P(x_o, y_o) por um número infinito de caminhos.

DEFINIÇÃO : Dizemos, que o limite de f(x, y) é o número L e escrevemos $\lim\limits_{(x,y)\to P} f(x,y) = L$, desde que o valor de f(x, y) da função em (x, y) tende a L, quando (x, y) tende a (x_o, y_o) sobre todos os caminhos que estão no domínio de f ou seja :



$\lim\limits_{(x,y)\to P} f(x,y) = L \Leftrightarrow$ para todo ε > 0, existe δ > 0 tal que, para todo (x, y) ∈ D_f ,

$0 < \sqrt{(x-x_o)^2 + (y-y_o)^2} < \delta \Rightarrow | f(x,y) - L | < \varepsilon.$

1. 1 – PROPRIEDADES

Se $\lim\limits_{(x,y)\to P} f(x,y) = L$ e $\lim\limits_{(x,y)\to P} g(x,y) = M$, então:

a) $\lim\limits_{(x,y)\to P} (f + g) = L + M$

b) $\lim\limits_{(x,y)\to P} (f - g) = L - M$

c) $\lim\limits_{(x,y)\to P} (f \, . \, g) = L \, . \, M$

d) $\lim\limits_{(x,y)\to P} k \, . \, f = k \, . \, L$, onde $k \in \mathbb{R}$.

e) $\lim\limits_{(x,y)\to P} \left(\dfrac{f}{g}\right) = \dfrac{L}{M}$, com M ≠ 0.

1.2 – REGRA DOS DOIS CAMINHOS

Há casos em que o limite de uma função de duas variáveis não existe, então nesta situação, para mostrar que o limite não existe, utilizamos conjuntos particulares convenientes(**caminhos**) , dados geralmente por curvas que passem em (x_o, y_o) . Se para dois caminhos diferentes para um mesmo ponto P resulta em dois limites diferentes, ou em um dos caminhos o limite não existe, então esse tal limite não existe.

EXERCÍCIO PROPOSTO : Mostre que o limite $\lim\limits_{P\to(0,0)} \dfrac{2x\;y}{x^2 + y^2}$ não existe .

2. CONTINUIDADE

DEFINIÇÃO : Uma função $f(x, y)$ é **Contínua** em um $P(x_o, y_o) \in D_f$, se e somente se , $\lim_{(x,y)\to P} f(x, y) = f(x_o, y_o)$, ou seja:

a) f é definida em (x_o, y_o) ;

b) $\lim_{(x,y)\to P} f(x, y)$ existe e

c) $\lim_{(x,y)\to P} f(x, y) = f(x_o, y_o)$

EXERCÍCIO PROPOSTO : Verifique se a função $f(x, y) = \dfrac{x^3 - 3xy^2 + 2}{2xy^2 - 1}$ é contínua no ponto P(1, 2).

Se f for contínua em todos os pontos de um subconjunto A de D_f, então f é contínua em A.

Se $\boldsymbol{f}$ e $\mathbf{g}$ forem funções contínuas em um ponto $P(x_o, y_o)$ que pertencem a seus domínios, então $f + g$, $f - g$, $f \cdot g$ e $\dfrac{\mathbf{f}}{\mathbf{g}}$, com $g \neq 0$, também serão contínuas nesse ponto

Se $z = f(x, y)$ for uma função contínua de x e y e $w = g(z)$ for uma função contínua de **z**, então a composta $w = g(f(x, y)$ é contínua.

Se função pode possui uma descontinuidade evitável (ou não essencial), então é possível redefinir a função, obtendo assim uma função contínua

EXERCÍCIO PROPOSTO : As funções, são descontínuas na origem. Determine se a descontinuidade é removível ou não. Se a descontinuidade for removível, redefina $f(0, 0)$, de tal modo que a nova função seja contínua na origem.

a) $G(x, y) = \dfrac{xy}{x^2 + xy + y^2}$ b) $f(x, y) = \dfrac{x^3 - xy^2}{x + y}$ c) $g(x, y) = \dfrac{x^2 - 4x}{x}$

LISTA DE EXERCÍCIOS

1. Determine os limites, caso existam.

a) $\lim\limits_{P \to (2,1)} (x^2 - 4xy)$

b) $\lim\limits_{P \to (-5,3)} \dfrac{x^3 y}{x^2 - y}$

c) $\lim\limits_{P \to (1,4)} \dfrac{x}{\sqrt{y}}$

d) $\lim\limits_{P \to (0,0)} e^{3x-2y}$

e) $\lim\limits_{P \to (0,\ln 2)} e^{x-y}$

f) $\lim\limits_{P \to (1,3,4)} \sqrt{x^2 + y^2 + z^2 - 1}$

g) $\lim\limits_{P \to (0,0)} \dfrac{e^x \operatorname{sen} x}{x}$

h) $\lim\limits_{P \to (0,0)} \dfrac{x + y}{x - y}$

i) $\lim\limits_{P \to (0,0)} \dfrac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}$

j) $\lim\limits_{P \to (1,1)} \dfrac{x^3 y^3 - 1}{xy - 1}$

l) $\lim\limits_{P \to (0,0)} \sqrt[3]{x.y - 1}$

m) $\lim\limits_{P \to (1,2)} \dfrac{xy - 2x - y + 2}{x^2 + y^2 - 2x - 4y + 5}$

2. Mostre pela definição que $\lim\limits_{P \to (3,2)} (3x - 4y) = 1$.

3. Determine o conjunto no qual a função é contínua.

a) $f(x, y) = \ln(x + y - 1)$

b) $g(x, y) = \sqrt{25 - x^2 - y^2}$

c) $f(x, y, z) = \sqrt{xy} \,.\, \operatorname{tg} z$

d) $f(x, y) = \dfrac{x^2}{y - 1}$

e) $h(x, y) = \operatorname{sen} \dfrac{y}{x}$

f) $F(x, y) = \operatorname{arc\,sec}(x \,.\, y)$

4. Para cada item abaixo $\phi = g \circ f$, determine o conjunto de pontos para os quais a função resultante é contínua.

a) $f(x, y) = z = x + \operatorname{tg} y$ e $g(z) = z + 1$

b) $f(x, y) = w = y \,.\, \ln x$ e $g(w) = e^w$

5. Dada a função $f(x, y) = \begin{cases} 10 - x - 2y, & \text{se } (x, y) \neq (-2,2) \\ k, & \text{se } (x, y) = (-2,2) \end{cases}$, determine o valor de **k**, para que f seja contínua em P $(-2, 2)$.

R. k = 8

DERIVADAS PARCIAIS

1. INTRODUÇÃO

Podemos aplicar o cálculo de derivadas de **Função a uma variável** para uma **Função de duas variáveis**. Podemos, por exemplo, tomar **x** ou **y** constante e considerar $f(x, y)$ como uma função da outra variável. As derivadas das funções resultantes são denominadas **Derivadas Parciais**.

DEFINIÇÃO 1 : A derivada parcial de $f(x, y)$ em relação a **x** é obtida, tomando-se **y como constante** e derivando-se em relação a **x** , ou seja:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x, y) - f(x, y)}{\Delta x} .$$

DEFINIÇÃO 2 : A derivada parcial de $f(x, y)$ em relação a **y** é obtida, tomando-se **x como constante** e derivando-se em relação a **y** , ou seja :

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{f(x, y + \Delta y) - f(x, y)}{\Delta y} .$$

Na maioria dos casos, não temos que calcular os limites acima, para determinar as derivadas parciais da função. Ao invés disso, utilizamos as regras de derivação de funções de uma variável.

EXERCÍCIO PROPOSTO : Calcule as derivadas parciais das funções abaixo:

a) $f(x, y) = x^3y - y^2x^2 + x$ b) $f(x, y) = \text{sen}(2x + y)$

OBSERVAÇÃO : Se a função possui **três variáveis ou mais variáveis** o procedimento para cálculo das **Derivadas Parciais** é análogo ao cálculo para funções de duas variáveis.

EXERCÍCIOS PROPOSTOS

1. Encontrar as derivadas parciais das seguintes funções

a) $f(x, y, z) = x^2y + xz^2 + xyz$ b) $g(x, y, z, r, t) = xyr + yzt + yrt + zrt$

2. Seja a função abaixo, calcule as derivadas parciais.

$$f(x, y) = \begin{cases} \dfrac{x.y}{x + y}, & \text{se } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0, & \text{se } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

2. DERIVADAS PARCIAIS DE ORDEM SUPERIOR

Se f é uma função de duas variáveis, então, em geral, suas derivadas parciais de 1ª ordem são, também, funções de duas variáveis. Se as derivadas dessas funções existem, elas são chamadas derivadas parciais de 2ª ordem de f .

Para uma função z = f(x, y) temos quatro derivadas parciais de 2ª ordem. Já vimos como encontrar as funções $\frac{\partial f}{\partial x}$ e $\frac{\partial f}{\partial y}$, então utilizando o mesmo procedimento, podemos encontrar as funções:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) = f_{xx} \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) = f_{xy}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right) = f_{yy} \qquad \frac{\partial^3 f}{\partial x \partial y \partial x} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}\right) = f_{xyx}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right) = f_{yx}$$

EXERCÍCIOS PROPOSTOS :

1. Seja $f(x, y) = xy^2 + x^3y^5$. Encontre as derivadas parciais até a 2ª ordem.

2. Seja a função $G(x, y, z) = x^2 y - 2y^3 z^2 + x^3 y^4 z^5$. Encontre as seguintes derivadas parciais de 3ª ordem : g_{xxy} , g_{yyz} , g_{yzx} , g_{zzx} .

2.1 – IGUALDADE DAS DERIVADAS PARCIAIS

TEOREMA : Se $f(x, y)$ e suas derivadas parciais f_x , f_y , f_{xy} e f_{yx} forem definidas numa região que contenha o ponto (x_o, y_o) e forem contínuas nesse ponto, então :

$$f_{xy}(x_o, y_o) = f_{yx}(x_o, y_o).$$

3. DIFERENCIABILIDADE

DEFINIÇÃO : Uma função f é diferenciável em um ponto $(x_o, y_o) \in D_f$ se as derivadas parciais f_x e f_y existirem e forem contínuas neste ponto.

EXERCÍCIO PROPOSTO : Verifique se a função $f(x, y) = 2x^3 - y$ é diferenciável nos pontos do seu domínio. Se for diferenciável, calcule o diferencial no ponto P(1, 2), utilizando a fórmula :

$$\mathbf{dz = a \,.\, \Delta x + b \,.\, \Delta y}, \text{ onde } \mathbf{a = \boldsymbol{f}_x (P)} \text{ e } \mathbf{b = \boldsymbol{f}_y (P)} .$$

LISTA DE EXERCÍCIOS

1. **Stewart. 917** – O índice de sensação térmica W é a temperatura que se sente quando a temperatura real for T e a rapidez do vento(v) e portanto podemos escrever W = f(T, v) . Baseando–se nos dados da tabela abaixo, Estime os valores de W_r (– 15, 30) e W_v (– 15, 30) e dê uma interpretação para os resultados .

T \ V	20	30	40	50	60	70
– 10	– 18	– 20	– 21	– 22	– 23	– 23
– 15	– 24	– 26	– 27	– 29	– 30	– 30
– 20	– 30	– 33	– 34	– 35	– 36	– 37
– 25	– 37	– 39	– 41	– 42	– 43	– 44

2. Aplique a definição para encontrar as derivadas parciais de 1ª ordem das funções abaixo :

a) $f(x, y) = 3x^2 - 2xy + y^2$

b) $g(x, y) = 6x + 3y - 7$

3. Determine as derivadas parciais das funções abaixo :

a) $f(x, y) = 2x^4y^3 - xy^2 + 3y + 1$

b) $f(x, y) = (x^3 - y^2)^2$

c) $f(x, y) = \text{sen } 3x \cdot \cos y$

d) $f(x, y) = x \cdot e^y + y \cdot \text{sen } x$

e) $f(u, v) = e^{u^2 v}$

f) $f(x, y) = e^x \cdot \ln |y|$

g) $f(x, y) = x \cdot \cos(y - x)$

h) $f(r, s, t) = r^2 \cdot e^{2s} \cdot \cos t$

i) $f(x, y, z) = x e^z - y e^x + z e^{-y}$

j) $f(x, y, z) = x \cdot y \cdot z \cdot e^{xyz}$

l) $f(x, y) = \sec(x + y)$

m) $f(u, v, w, x) = \ln(u \cdot v \cdot w \cdot x)$

4. Seja $f(x, y) = \begin{cases} \dfrac{x}{y}, & \text{se } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0, & \text{se } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$, encontre as derivadas parciais da função f em relação a **x** e a **y** .

5. Considere a função $f(x, y) = x^2 + 3y^2$. Calcule :

a) $f_x(3, 2)$

b) $f_y(3, 2)$

R. 6 ; 12

6. O volume de cone circular reto de altura h com raio **r** é $V(r, h) = \frac{1}{3}\pi r^2 h$. Qual é a taxa de variação do volume em relação ao raio quando r = 2m e h = 6m?

R. 8π m³

7. Uma placa de metal aquecida em um plano xy de modo tal que a temperatura T no ponto (x, y) é dada por $T(x, y) = 10(x^2 + y^2)^2$. Determine a taxa de variação de T em relação à distância no ponto P(1, 2) na direção do eixo dos xx e na direção do eixo dos yy.

R. 200 ; 400

8. Encontre a inclinação da reta tangente à curva $z = 6 - x^2 - y^2$, resultante da interseção de $z = f(x, y)$ com $x = 2$, no ponto P(2, 1, 1).

R. – 2

9. Encontre a inclinação da reta tangente à curva $z = 2x^2 + 5xy^2 - 12x$, resultante da interseção de $z = f(x, y)$ com $y = 1$, no ponto P(2, 1, – 6).

R. 1

10. Seja C o traço do parabolóide $z = 9 - x^2 - y^2$ no plano x = 1. Determine a equação da tangente a C no ponto P(1, 2, 4).

R. $z = -4y + 12$

11. Suponha que, em um dia, quando x operários constituem a força de trabalho e são usadas y máquinas, um fabricante produza $f(x, y)$ mesas onde :

$$f(x, y) = x^2 + 4xy + 3y^2 \; ; \; 4 \leq x \leq 25 \quad e \quad 3 \leq y \leq 10 \, .$$

a) Ache o número de mesas produzidas em 1 dia que compareceram 10 operários e foram usadas 5 máquinas.

b) Determine $f_x(10, 5)$; c) Determine $f_y(10, 5)$;

d) Interprete os resultados dos itens **b** e **c** ;

R. 375 ; 40 ; 70

12. A temperatura de um ponto qualquer de uma chapa de aço é dada por $T(x, y) = x^2 + 4y^2$ (T em Celsius, x e y em metros).

a) Determine a equação da isoterma que passa no ponto P(0, 1) ;

b) Determine as taxas de variação na direção dos eixos coordenados x e y, no ponto P(2, 1) ;

c) Com relação ao item anterior, em qual direção a temperatura da chapa aumenta mais rapidamente .

R. 4º C ; 8º C ; eixo y

13. **Anton – 957**. De acordo com a lei dos gases ideais, a pressão, a temperatura e o volume de um gás estão relacionados por $P = \dfrac{k.T}{V}$, onde k é a constante de proporcionalidade. Suponha que V seja medido em polegadas cúbicas(pol^3), T seja medido em kelvins(K), e que para um certo gás a constante de proporcionalidade(k = 10 pol/K).

a) Determine a taxa de variação instantânea da pressão em relação à temperatura se a temperatura for 80 K e o volume permanecer constante em 50 pol^3 .

b) Determine a taxa de variação instantânea do volume em relação à pressão se a pressão for 16 lb/pol^2 e a temperatura permanecer constante em 80 K.

14. Calcule as derivadas de 2ª ordem das funções abaixo:

a) $f(x, y) = x^4y^5$ b) $f(x, y) = 3xy^2 - 2y + 5x^2y^2$ c) $f(x, y) = \ln(2x - 3y)$

15. Seja $f(x, y) = x^3y^4$, encontre:

a) $f_x(2, 1)$ b) $f_y(2, 1)$ c) $f_{xy}(2, 1)$

R. 12 ; 32 ; 48

16. Seja $g(x, y) = y^3e^{-4x}$, encontre $g_{xyy}(0, 2)$.

R. – 48

17. Calcule f_{xy}, f_{yz} e f_{xz} para $f(x, y, z) = x^2e^{-3y} \cdot \text{sen}(4z)$

18. Seja um tanque cilíndrico a ser construído em chapa galvanizada. Encontre o aumento aproximado de seu volume quando o raio aumenta de 3m para 3,05 e sua altura de 10 m para 10,1 m.

R. $3{,}9\pi\ m^3$

19. Sabe-se que certa função $z = f(x, y) =$ é tal que $f(1, 2) = 3$ e suas derivadas satisfazem $f_x(1, 2) = 2$ e $f_y(1, 2) = 5$, faça uma estimativa razoável para $f\left(\frac{11}{10}, \frac{18}{10}\right)$.

20. A energia consumida num resistor elétrico é dada por $\mathbf{P} = \frac{U^2}{R}$ watts . Se U = 120 volts e R = 12 ohms, calcular um valor aproximado para a variação de energia quando V decresce de 0,001 volts e R aumenta de 0,002 ohms

R. – 0,22w

21. Um recipiente de metal, fechado, na forma de um cilindro circular reto, tem sua altura interna de 6cm, um raio interno de 2cm, e uma espessura de 0,1 cm. Se o custo do material a ser usado é de R$ 1,50 por centímetro cúbico. Ache por diferenciais o custo aproximado do metal que será empregado na produção do recipiente.

R. R$ 15,07

22. **Stewart. 924** – Utilizando a tabela do exercício 1 , da página 12 , determine a aproximação linear para a sensação térmica W = $f(T, v)$ quando T está próximo de – 15 º C e v está próximo de 30 km/h. Use essa estimativa do índice de calor quando T = – 17 ºC e v = 33 km/h .

REGRA DA CADEIA

1. INTRODUÇÃO

No estudo de funções de uma variável utilizamos a **regra da cadeia** para calcular a derivada de uma função composta. Vamos, também utilizar a regra da cadeia para o caso de funções de várias variáveis.

Inicialmente vamos trabalhar com funções de duas variáveis.

2. FUNÇÕES DE DUAS VARIÁVEIS

2.1 – 1º CASO : Se $w = f(x, y)$ tem derivadas parciais f_x e f_y contínuas e se, $x = x(t)$ e $y = y(t)$ são funções diferenciáveis em **t**, então a função composta $w = f(x(t), y(t))$ é uma função diferencial de **t** e :

$$\frac{dw}{dt} = f_x[\,x(t), y(t)\,]\,.\,x'(t) + f_y[\,x(t), y(t)\,]\,.\,y'(t) \quad \text{ou} \quad \frac{dw}{dt} = \frac{\partial f}{\partial x}.\frac{dx}{dt} + \frac{\partial f}{\partial y}.\frac{dy}{dt}$$

EXERCÍCIOS PROPOSTOS :

1. Sejam as funções $f(x, y) = y + x^2$, $x(t) = t + 1$ e $y(t) = t + 4$. Encontre $\dfrac{df}{dt}$, utilizando a regra da cadeia.

2. Qual é a derivada de $G(t) = H(t^3, 5t)$ em $t = 1$, se $H(x, y)$ tem derivadas de 1ª ordem contínuas e $H_x(1, 5) = 4$, $H_y(1, 5) = -2$?

3. Seja a lei do gás ideal $PV = k\,.\,T$. Encontre a taxa segundo a qual a temperatura está variando no instante em que o volume do gás é $120m^3$ e o gás está sob uma pressão de $8N/m^2$ se o volume está aumentando a uma taxa de $2\ m^3/s$ e a pressão está decrescendo a uma taxa de $0,1\ N/m^2$ por segundo. Considere $k = 10$.

2.2 – 2º CASO : Sejam $w = f(x, y)$, $x = x(u, v)$, $y = y(u, v)$ e w possui derivadas parciais de 1ª ordem contínuas então:

$$\frac{\partial w}{\partial u} = \frac{\partial f}{\partial x}.\frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial f}{\partial y}.\frac{\partial y}{\partial u} \quad \text{e} \quad \frac{\partial w}{\partial v} = \frac{\partial f}{\partial x}.\frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial f}{\partial y}.\frac{\partial y}{\partial v}$$

EXERCÍCIOS PROPOSTOS :

1. Sejam as funções $f(u, v) = u^2 - v + 4$, $u(x, y) = x + y$ e $v(x, y) = x\,.\,y$. Encontre as derivadas f_x e f_y em função de x e y .

2. Sejam as funções $f(x, y) = x^2 - y^2$, $x(r, s) = 3r - s$ e $y(r, s) = r + s$. Encontre as derivadas f_r e f_s em função de r e s .

3. REGRA DA CADEIA PARA FUNÇÕES DE TRÊS VARIÁVEIS

3.1 – 1º CASO : Suponhamos que $f(x, y, z)$ tem derivadas de 1ª ordem contínuas e que $x = x(t)$, $y = y(t)$, $z = z(t)$ são funções diferenciáveis em **t**, então :

$$\frac{df}{dt} = f_x[x(t), y(t), z(t)].x'(t) + f_y[x(t), y(t), z(t)].y'(t) + f_z[x(t), y(t), z(t)].z'(t)$$

$$\frac{\partial f}{\partial t} = \frac{\partial f}{\partial x}.\frac{dx}{dt} + \frac{\partial f}{\partial y}.\frac{dy}{dt} + \frac{\partial f}{\partial z}.\frac{dz}{dt} \ .$$

EXERCÍCIO PROPOSTO : Suponhamos que as derivadas parciais de $f(x, y, z)$ sejam contínuas e que $f_x(1, 1, 1) = 4$, $f_y(1, 1, 1) = 5$, $f_z(1, 1, 1) = 6$. Qual é a derivada $\frac{df}{dt}$ em $t = 1$, se $x = t$, $y = t^3$ e $z = t^2$?

3.2 – 2º CASO : Se $G = f(x, y, z)$, $x = x(u, v, w)$, $y = y(u, v, w)$ e $z = z(u, v, w)$, então possuem derivadas de 1ª ordem contínuas, então:

$$\frac{\partial G}{\partial u} = \frac{\partial f}{\partial x}.\frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial f}{\partial y}.\frac{\partial y}{\partial u} + \frac{\partial f}{\partial z}.\frac{\partial z}{\partial u}$$

$$\frac{\partial G}{\partial v} = \frac{\partial f}{\partial x}.\frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial f}{\partial y}.\frac{\partial f}{\partial v} + \frac{\partial f}{\partial z}.\frac{\partial z}{\partial v}$$

$$\frac{\partial G}{\partial w} = \frac{\partial f}{\partial x}.\frac{\partial x}{\partial w} + \frac{\partial f}{\partial y}.\frac{\partial y}{\partial w} + \frac{\partial f}{\partial z}.\frac{\partial z}{\partial w}$$

EXERCÍCIOS PROPOSTOS :

1. Sejam as funções $G(x, y, z) = x^2 + xy + z$, $x(r, s) = r^2$, $y(r, s) = 3r - 2s$ e $z = z(r, s) = s^2$. Encontre as derivadas G_r e G_s .

2. Calcule $F(0, 0, 0)$, $F_x(0, 0, 0)$, $F_y(0, 0, 0)$ e $F_z(0, 0, 0)$, sendo $F(x, y, z) = \sqrt{L(x, y, z)}$ e $L(0, 0, 0) = 9$, $L_x(0, 0, 0) = 5$, $L_y(0, 0, 0) = 4$ e $L_z(0, 0, 0) = -3$.

R. 3; $\frac{5}{6}$; $\frac{2}{3}$; $-\frac{1}{2}$

4. DERIVAÇÃO IMPLÍCITA

No estudo das funções de uma variável, vimos que uma função $y = f(x, y)$ é definida implicitamente pela equação $F(x, y) = 0$ se ao substituirmos y por $f(x)$, essa equação se transforma numa identidade.

EXERCÍCIO PROPOSTO : A equação $x^2 + y = 1$, define implicitamente a função $y = 1 - x^2$, logo $F(x, y) = 0$ é uma identidade.

Do mesmo modo, dizemos que uma função $z = f(x, y)$ é definida implicitamente pela equação $F(x, y, z) = 0$ se, ao substituirmos **z** por $f(x, y)$, essa equação se reduz a uma identidade.

4.1 – DERIVADAS PARCIAIS DE UMA FUNÇÃO IMPLÍCITA $z = f(x, y)$

Seja a equação $F(x, y, z) = 0$, onde F é uma função implícita de duas variáveis (x e y), tal que $z = f(x, y)$, para todo $(x, y) \in D_f$, então :

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{F_x(x,y,z)}{F_z(x,y,z)} \qquad \frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{F_y(x,y,z)}{F_z(x,y,z)}$$

EXERCÍCIO PROPOSTO : Encontre as derivadas parciais da função $F(x, y, z) = xz^2 + 2x^2y - 4y^2z + 3y - 2 = 0$, onde $z = f(x, y)$.

4.2 – DERIVADA DAS FUNÇÕES $y = y(x)$ e $z = z(x)$ DEFINIDAS IMPLICITAMENTE POR

$$\begin{cases} F(x,y,z) = 0 \\ G(x,y,z) = 0 \end{cases}$$

Suponhamos que as funções diferenciáveis $y = y(x)$ e $z = z(x)$ sejam definidas implicitamente pelo sistema $\begin{cases} F(x,y,z) = 0 \\ G(x,y,z) = 0 \end{cases}$, onde F e G são funções diferenciáveis.

Para obter as derivadas $\frac{dy}{dx}$ e $\frac{dz}{dx}$, basta derivarmos as equações F e G em relação a x , utilizando-se para isto a **Regra da Cadeia**, ou seja :

$$\begin{cases} \dfrac{\partial F}{\partial x}.\dfrac{dx}{dx} + \dfrac{\partial F}{\partial y}.\dfrac{dy}{dx} + \dfrac{\partial F}{\partial z}.\dfrac{dz}{dx} = 0 \\ \\ \dfrac{\partial G}{\partial x}.\dfrac{dx}{dx} + \dfrac{\partial G}{\partial y}.\dfrac{dy}{dx} + \dfrac{\partial G}{\partial z}.\dfrac{dz}{dx} = 0 \end{cases}$$

EXERCÍCIO PROPOSTO : Sejam as funções $y = y(x)$ e $z = z(x)$ definidas pelo sistema $\begin{cases} x^2 + y^2 = z^2 \\ x + y = 2 \end{cases}$, com $z > 0$, encontre $\frac{dy}{dx}$ e $\frac{dz}{dx}$.

LISTA DE EXERCÍCIOS

1. Seja $f(x, y) = x \,.\, \text{sen}(x \,.\, y)$, $x(t) = t^5$ e $y(t) = t^{-3}$, encontre $\dfrac{df}{dt}$.

2. Seja $f(x, y) = x \,.\, \ln (xy)$, $x(u, v) = u \,.\, e^v$ e $y(u, v) = u^2 \,.\, v^3$, encontre f_u e f_v.

3. Calcule $g(2)$ e $\dfrac{dg}{dt}(2)$, para $g(t) = f(t^3, t^4)$, onde $f(8, 16) = 3$, $f_x(8, 16) = 5$ e $f_y(8, 16) = -7$.

R. 3; – 164

4. Encontre $\dfrac{dw}{dt}$, quando $w = x^2 + y^2 + z^2$, $x = e^t \,.\, \cos t$, $y = e^t \,.\, \text{sen}\, t$, $z = e^t$.

5. Determine W_u, se $W = x^2 + y^2$, $x = u - v$, $y = v \,.\, e^{2u}$ e dê a resposta em função de x e y .

6.Determine W_v , quando $u = 0$, $v = 0$, se $W = (x^2 + y - 2)^4 + (x - y + 2)^3$, $x = u - 2v + 1$ e $y = 2u - v - 2$.

7. As dimensões de um sólido com forma de paralelepípedo, num determinado instante t_o , são : $L(t_o) = 13$cm (comprimento), $W(t_o) = 9$cm (largura) e $H(t_o) = 5$cm(altura). Se L e H crescerem à razão de 2cm/s e W decrescer à 4cm/s. Determine as taxas de variação do volume e da área total no instante t_o .

R. 64 ; Zero

8. Uma função $z = z(x, y)$ é definida pela equação $xyz + 5x^2y^2z^2 = 6$ e pela condição $z(-1,1) = 1$. Calcule $z_x(-1, 1)$ e $z_y(-1, 1)$.

R. – 1 ; – 1

9. Seja $g(t) = f (3t, 2t^2 - 1)$.

a) Encontre $g'(t)$

b) Calcule $g'(0)$, admitindo $f_x(0, -1) = \dfrac{1}{3}$

R. b) 1

10. Mostre que $z_u + z_v = 0$, se $z = f(u - v, v - u)$.

11. Se $z = x^2 + 2y^2$ e $x = \text{sen}\, t$, $y = \cos t$, achar $\dfrac{dz}{dt}$, utilizando a regra da cadeia. Verificar o resultado substituindo x e y pelos seus valores antes de derivar.

12. Se $u = t \,.\, x \,.\, y \,.\, z$ e $x = 1 + t^2$, $y = 1 + t^3$, $z = 1 + t^4$, achar $\dfrac{du}{dt}$.

13. Um ponto móvel se desloca sobre a curva interseção da superfície $z^2 = x^2 + x \cdot y + y^2$ com o plano $x - y + 2 = 0$. Achar as velocidades com que crescem **y** e **z** no instante em que $x = 3$. Sabendo que neste instante x cresce com uma velocidade de duas unidades por segundo. Qual a velocidade do móvel ?

R. $y' = 2$; $z' = \dfrac{24}{7}$; $v = 4{,}44$

14. Em um cilindro o raio da base decresce à razão de 0,1 dm/s e a altura de 0,2 dm/s. com que velocidade decresce o volume no momento em que o raio é igual a 4dm e a altura igual a 6dm ?

R. -8π dm³ / s

15. Num instante genérico t, as coordenadas de um ponto móvel P, são : $x = 3 + 2t^2$, $y = 2 - 3t^2$. Achar a velocidade angular do raio vetor $\overrightarrow{OP}$ quando $t = 1s$.

R . – 1 rad / s

16. Sejam $f(x, y) = x^2 \cdot y^3$, $x = 3t$ e $y = 2t + 1$. Calcule $g''(t)$, utilizando a regra da cadeia, sendo $g(t) = f(x, y)$.

17. Supondo que as funções diferenciáveis $y = y(x)$ e $z = z(x)$, $z > 0$, sejam definidas implicitamente pelo sistema dado, determinar as derivadas $\dfrac{dy}{dx}$ e $\dfrac{dz}{dx}$.

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = 4 \\ x + y + z = 2 \end{cases}$$

18. Sejam $f(x, y) = x^2 \cdot y^3$, $x = 3t$ e $y = 2t + 1$. Calcule $g''(t)$, utilizando a regra da cadeia, sendo $g(t) = f(x, y)$.

19. Seja $z = f(u - 2v , v + 2u)$ onde $f(x, y)$ é de classe C^2 num aberto de $\mathbb{R}^2$. Expresse z_{uu} em termos de derivadas parciais de f , utilizando regra da cadeia.

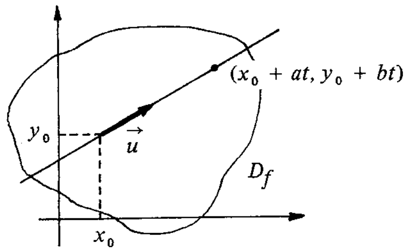
20. **Stewart.931** – A pressão P (Kpa), o volume V(litros) e a temperatura T(K) de um mol de um gás ideal estão relacionados por meio da fórmula PV = 8,31T. Determine a taxa de variação da pressão quando a temperatura é de 300K está aumentando com a taxa de 0,1 K/s e o volume é de 100ℓ está aumentando com a taxa de 0,2 ℓ/s .

DERIVADAS DIRECIONAIS

1. INTRODUÇÃO

A derivada em relação a x(f_x) e a derivada em relação a y(f_y), só nos dizem as taxas de variação de f(x, y), quando (x, y) se desloca paralelamente aos eixos dos x ou dos y. Para se ter um completo conhecimento da função, precisamos saber suas taxas de variação, quando (x, y) se desloca em outras direções. Tais taxas de variação são chamadas **Derivadas Direcionais** .

A derivada direcional de f , a partir de um ponto P(x_o, y_o) é determinada pela reta orientada (**r**) que forma com o eixo-x um ângulo α.



1.1 – DEFINIÇÃO : Se f(x, y) é diferenciável no ponto P(x_o, y_o) então f(x, y) tem derivadas direcionais neste ponto em qualquer direção e vale :

$$f_\alpha(x_o, y_o) = f_x(x_o, y_o) \cdot \cos\alpha + f_y(x_o, y_o) \cdot \operatorname{sen}\alpha.$$

Podemos determinar a direção de uma reta **r** através do seu vetor diretor $\vec{u}$ ou então do seu versor ($\vec{v}$) , portanto podemos escrever que :

$$f_u(x_o, y_o) = D_u f(x_o, y_o) = f_x(x_o, y_o) \cdot a + f_y(x_o, y_o) \cdot b \text{ , onde } \vec{v} = a.\vec{i} + b\,\vec{j}$$

EXERCÍCIO PROPOSTO : Encontre a derivada direcional da função f(x, y) = $4 - x^2 - y^2$ em P(1, 2), sendo $\alpha = 60^o$.

2. VETOR GRADIENTE

DEFINIÇÃO : Chama-se **Gradiente** de f(x, y) no ponto (x_o, y_o) e é representado todo por grad $f(x_o, y_o)$ ou $\vec{\nabla} f(x_o, y_o)$, o vetor :

$$\vec{\nabla} f(x_o, y_o) = f_x(x_o, y_o) \cdot \vec{i} + f_y(x_o, y_o) \cdot \vec{j}$$

EXERCÍCIO PROPOSTO : Seja a função g(x, y) = $-4x^2 - y^2$. Encontre o vetor gradiente da função no ponto A(2, – 3).

A fórmula para encontrar uma **derivada direcional** pode ser escrita em função do **Vetor Gradiente** e do **versor**($\vec{v}$) do vetor diretor da reta, ou seja :

$$f_u(x_o, y_o) = \vec{\nabla} f(x_o, y_o) \cdot \vec{v} .$$

2.1 – PROPRIEDADES DO GRADIENTE

Seja f diferenciável no ponto (x, y).

1ª : Se **grad.** $\boldsymbol{f}$ **(x, y) = 0**, então $\mathbf{D_u} \boldsymbol{f}$**(x, y) = 0**, para todo $\vec{u}$;

2ª : A direção de crescimento **máximo** de f é dada por $\vec{\nabla} f(x, y)$. O **valor máximo** de $\mathbf{D_u} \boldsymbol{f}$**(x, y)** é $\| \vec{\nabla} f(x, y) \|$.

3ª : A direção de crescimento **mínimo** de f é dada por $\vec{\nabla} f(x, y)$. O **valor mínimo** de $\mathbf{D_u} \boldsymbol{f}$**(x, y)** é $-\| \vec{\nabla} f(x, y) \|$.

3. DERIVADA DIRECIONAL E VETOR GRADIENTE PARA FUNÇÕES DE TRÊS VARIÁVEIS

Para as funções de três variáveis temos que a derivada direcional é dada por :

$f_u(x_o, y_o, z_o) = f_x(x_o, y_o, z_o) \cdot \cos\alpha + f_y(x_o, y_o, z_o) \cdot \cos\beta + f_z(x_o, y_o, z_o) \cdot \cos\gamma$, onde : $\cos\alpha$, $\cos\beta$ e $\cos\gamma$ são os cossenos diretores da reta r .

Utilizando as coordenadas do vetor diretor da reta temos :

$f_u(x_o, y_o, z_o) = f_x(x_o, y_o, z_o) \cdot a + f_y(x_o, y_o, z_o) \cdot b + f_z(x_o, y_o, z_o) \cdot c$, onde $\vec{v} = (a, b, c)$ ou :

$f_u(x_o, y_o, z_o) = \vec{\nabla} f(x_o, y_o, z_o) \cdot \vec{v}$, onde $\vec{v}$ é o **versor de** $\vec{u}$.

O vetor gradiente para função de três variáveis é calculado através da expressão :

$$\vec{\nabla} f = f_x \cdot \vec{i} + f_y \cdot \vec{j} + f_z \cdot \vec{k}$$

EXERCÍCIOS PROPOSTOS

1. Seja a função $f(x, y, z) = x^2 + y^2 - 4z$, encontre a derivada direcional e o vetor gradiente de f no ponto B(2, – 1, 1).

2. **Stewart – 949** . A temperatura T em uma bola de metal é inversamente proporcional à distância do centro da bola, que tomamos como sendo a origem. A temperatura no ponto P(1, 2, 2) é de 120º.

a) Determine a taxa de variação de T em P(1, 2, 2) em direção ao ponto T(2, 1, 3) .

b) Qual é a direção de maior crescimento da temperatura na bola ?

LISTA DE EXERCÍCIOS

1. Qual é a derivada de $f(x, y) = x^2 y^3$ no ponto P(2, 1) na direção do vetor $\vec{AB}$, onde A(3, 1) e B(4, – 3) ?

2. Calcule o gradiente da função e a derivada direcional no ponto, na direção e no sentido indicados :

a) $f(x, y) = \text{sen}(x \cdot y)$, em $P\left(\frac{3}{4}, \pi\right)$, $\vec{u} = -\frac{1}{\sqrt{5}}\vec{i} + \frac{2}{\sqrt{5}}\vec{j}$.

b) $f(x, y) = x^2 \cdot e^{2y}$, em P (4, 3), $\vec{u} = 2\vec{i} - 3\vec{j}$

c) $f(x, y, z) = x \cdot \text{sen}\, y + y \cdot \text{sen}\, z + z \cdot \text{sen}\, x$, em $P\left(\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2}\right)$, $\vec{u} = \vec{i} - \vec{k}$

3. Se $D_u f(1, 2) = \frac{7}{\sqrt{2}}$ para $\vec{u} = \frac{1}{\sqrt{2}}\vec{i} - \frac{1}{\sqrt{2}}\vec{j}$ e $D_v f(1,2) = 0$ para $\vec{v} = \frac{4}{5}\vec{i} + \frac{3}{5}\vec{j}$, então, quanto valem $f_x(1, 2)$ e $f_y(1, 2)$?

R. 3 ; 4

4. Determine a direção segundo a qual f decresce mais rapidamente a partir de P(– 1, 1) e a razão de variação de f nessa direção sendo $f(x, y) = x^2 + xy + y^2$.

5 . Quais as duas direções em que a derivada de $f(x, y) = xy + y^2$, no ponto P(2, 5), é nula ?

6. Calcule a derivada direcional de $f(x, y) = 2x - 3y$ no ponto P(1, 1) e na direção da reta tangente à curva $y = x^2$ no ponto P , no sentido dos x crescentes.

R. $\frac{-4}{\sqrt{5}}$

7. Achar as derivadas direcionais das seguintes funções no ponto dado e segundo a direção indicada. Achar ainda o módulo e a direção do gradiente no mesmo ponto.

a) $z = x^2 + y^2$; P(2, 1) e $\alpha = 60^o$

b) $z = \ln\sqrt{x^2 + y^2}$; P(2, 1) e $\alpha = 30^o$

c) $w = 2x^2 - y^2 + z^2$; P(1, 2, 3) na direção da reta determinada pelos pontos P(1, 2, 3,) e Q(3, 5, 0)

d) $w = xy + yz + xz$; P(1, 1, 1) e $\alpha = 60^o$, $\beta = 45^o$ e $\gamma = 60^o$

e) $z = 2x - 3y$; P(1, 1) na direção da tangente à parábola $y = x^2$, no sentido positivo.

8. Seja $T = \dfrac{1}{x^2 + y^2}$ a expressão da temperatura de um disco metálico, no ponto (x, y) relativamente a um sistema cartesiano com a origem no centro do disco. Achar a razão de variação da temperatura no ponto P(2, 1), na direção α que faz um ângulo de 30º o eixo dos x . Achar o gradiente da temperatura no mesmo ponto.

R. – 0,18

9. Um potencial elétrico é dado pela fórmula $V = \dfrac{10}{x^2 + y^2}$. Achar a intensidade do campo elétrico ($\vec{E} = -\vec{\nabla} V$) no ponto P(2, 3).

R. – 0,43

10. Calcule a derivada direcional da função $f(x, y) = x \cdot \text{sen}(x \cdot y)$ no ponto $P\left(1, \dfrac{\pi}{2}\right)$ e na direção :

a) do eixo dos x

b) do vetor $2\,\vec{i} + \vec{j}$

c) em que ela é máxima

R. 2 ; $\dfrac{4}{\sqrt{5}}$; 2

11. Uma partícula que procura o calor está localizada no ponto P(2, 3) de uma placa lisa de metal, cuja temperatura em um ponto (x, y) é :

$$T(x, y) = 10 - 8x^2 - 2y^2.$$

Determine uma equação para a trajetória da partícula se ela se mover–se continuamente na direção do aumento máximo da temperatura.

PLANO TANGENTE E RETA NORMAL

1. PLANO TANGENTE E RETA NORMAL

As retas normais são muito importantes na análise de superfícies e sólidos. Por exemplo, considere a colisão de duas bolas de bilhar. Quando uma bola em repouso é atingida em um ponto P de sua superfície, ela se movimenta ao longo da reta de impacto determinada pelo ponto P e pelo centro da bola. Essa reta de impacto é a **reta normal** à superfície da bola no ponto P.

No processo de achar uma reta normal a uma superfície, seremos capazes, também, de resolver o problema de encontrar um **plano tangente** à superfície

DEFINIÇÃO : Seja F diferenciável no ponto $P = (x_o, y_o, z_o)$ de uma superfície S dada por $F(x, y, z) = 0$, onde $\vec{\nabla} F(x_o, y_o, z_o) \neq 0$.

1. O plano contendo P e **perpendicular** a $\vec{\nabla} F(x_o, y_o, z_o)$ é chamado de **plano tangente** de S em P ;
2. A reta contendo P e contendo a mesma direção que $\vec{\nabla} F(x_o, y_o, z_o)$ é chamada de **reta normal** ou **perpendicular** a S em P ;

1.1 – EQUAÇÃO DO PLANO TANGENTE

Seja F diferenciável no ponto $P = (x_o, y_o, z_o)$ então a equação do plano tangente à superfície S dada por $F(x, y, z) = 0$, em (x_o, y_o, z_o) é :

$$F_x(P) \cdot (x - x_o) + F_y(P) \cdot (y - y_o) + F_z(P) \cdot (z - z_o) = 0 .$$

EXERCÍCIO PROPOSTO : Seja $f(x, y) = 3x^2y - x$. Determine as equações do plano tangente no ponto P(1, 2, 5).

1.2 – EQUAÇÕES DA RETA NORMAL

Seja F diferenciável no ponto $P = (x_o, y_o, z_o)$ então as equações da reta normal ao plano tangente da superfície S dada por $F(x, y, z) = 0$, em (x_o, y_o, z_o) são :

$$\begin{cases} x = x_0 + \lambda \cdot F_x(P) \\ y = y_0 + \lambda \cdot F_y(P) \\ z = z_0 + \lambda \cdot F_z(P) \end{cases}$$

EXERCÍCIOS PROPOSTOS

1. Encontre a equação da reta normal ao gráfico de $f(x, y) = 4x^2 - xy$, no ponto P(1, 2).

2. Determine as equações do plano tangente e a reta normal à superfície $G(x, y, z) = 2x^2y - 3xyz + 4xy^2$ no ponto P(– 1, 2, 1).

OBSERVAÇÕES : 1. O plano tangente é normal $\vec{\nabla} F$ em P.

2. A reta normal é paralela a $\vec{\nabla} F$ em P.

LISTA DE EXERCÍCIOS

1. Para cada função abaixo, encontre a equação do plano tangente e da reta normal no ponto indicado :

a) $f(x, y, z) = x^3y^2 + y^3z^2 - 76$ em $P(1, 2, 3)$

b) $f(x, y) = x^2y - 3$, em $P(2, 1)$

c) $xyz + x^3 + z^3 = 3z$, em $P(1, -1, 2)$

d) $g(x, y) = x^2 - y^3$, em $P(-2, 2)$

e) $9x^2 + 36y^2 + 4z^2 = 108$, em $P(-2, 1, -3)$

2. Determine os pontos da hiperbolóide $x^2 - 2y^2 - 4z^2 = 16$ em que o plano tangente é paralelo ao plano $4x - 2y + 4z = 5$.

3. Para cada uma das superfícies abaixo, encontre a equação de um vetor perpendicular à superfície no ponto P indicado.

a) $x^2 + y^2 + z^2 = 9$; $P(1, 2, 2)$

b) $x + y^2 + z = 2$; $P\left(\frac{1}{2}, 1, \frac{1}{2}\right)$

c) $z - xy = 0$; $P(-2, -3, 6)$

4. Encontre a equação das retas que passam pela origem e são normais à superfície $xy + z = 2$.

R. $x = y = 0$ e $z = 1$

5. Achar a equação do plano tangente e as equações da reta normal do cone $z^2 = x^2 + y^2$ no ponto $P(3, 4, 5)$.

6. Achar a equação do plano tangente e as equações da reta normal para a parabolóide $z = x \cdot y$ no ponto $P(2, 3, 6)$.

7. Achar os pontos da superfície $z = x^2 + y^2 - 4x - 6y + 9$, em que o plano tangente é paralelo ao plano xOy.

R. $P(2, 3, -4)$

8. Obtenha as equações paramétricas da reta tangente à curva de interseção do parabolóide $z = x^2 + y^2$ e o elipsóide $3x^2 + 2y^2 + z^2 = 9$ no ponto $P(1, 1, 2)$.

Respostas :

5. $r : x = 3 - 6\lambda$; $y = 4 - 8\lambda$; $z = 5 - 10\lambda$ e $\pi : 3x + 4y + 5z - 50 = 0$

6. $\pi : 3x + 2y - z - 6 = 0$ e $r : x = 2 + 3\lambda$; $y = 3 + 2\lambda$; $z = 6 - \lambda$

8. $r : x = 1 + 6\lambda$; $y = 1 - 7\lambda$; $z = 2 - 2\lambda$

PONTOS EXTREMOS

1. INTRODUÇÃO

As funções de duas variáveis podem ter valores **Máximos e Mínimos** (**Absolutos e Relativos**), exatamente como as funções de uma variável. Os pontos extremos de uma função de duas variáveis pode ocorrer na **fronteira de uma região** ou no **seu interior**. O modo de obter tais valores para funções de várias variáveis é em tudo análogo ao do das funções de uma variável, a não ser pelo fato de agora termos mais derivadas a efetuar.

Consideremos uma função de duas variáveis $f : A \to \mathbb{R}$, onde $A \subset \mathbb{R}^2$.

DEFINIÇÃO 1 : Seja $P(x_o, y_o) \in A$. Diremos que $f(x_o, y_o)$ é o **Máximo** da função f em A se e somente se, $f(x, y) \leq f(x_o, y_o)$ para todo ponto do domínio da função f .

DEFINIÇÃO 2 : Seja $P(x_1, y_1) \in A$. Diremos que $f(x_1, y_1)$ é o **Mínimo** da função f em A se e somente se, $f(x, y) \geq f(x_1, y_1)$ para todo ponto do domínio da função f .

2. PONTO CRÍTICO DE UMA FUNÇÃO DE DUAS VARIÁVEIS

Seja $z = f(x, y)$ definida em um conjunto $D \subset \mathbb{R}^2$. Um ponto $(x_o, y_o) \in D$ é um **ponto crítico** de f se as **derivadas parciais são iguais a zero** ou se f **não é diferenciável** em $(x_o, y_o) \in D$.

Todo ponto extremo de uma função é um ponto crítico, mas nem todo ponto crítico é extremo. O ponto crítico que não é extremante é chamado **Ponto de Sela**.

3. CONDIÇÕES NECESSÁRIAS PARA A EXISTÊNCIA DE PONTOS EXTREMOS

Seja $z = f(x, y)$ uma função contínua, então os valores extremos de f poderão ocorrer somente em :

a) pontos de fronteira do domínio de f ;
b) pontos interiores onde $f_x = f_y = 0$;
c) pontos onde f_x e f_y não existem.

EXERCÍCIO PROPOSTO : Determinar os pontos críticos da função $f(x, y) = 3xy^2 + x^3 - 3x$.

4. CONDIÇÃO SUFICIENTE PARA UM PONTO CRÍTICO SER EXTREMO LOCAL

Seja f uma função que possui derivadas parciais de 1ª e 2ª ordem em qualquer região circular aberta que contenha (x_o, y_o) e se $f_x(x_o, y_o) = f_y(x_o, y_o) = 0$, ou seja, (x_o, y_o) é um ponto crítico de f . Seja o determinante :

$$H(x, y) = \begin{vmatrix} f_{xx} & f_{yx} \\ f_{xy} & f_{yy} \end{vmatrix} \Rightarrow H(x, y) = f_{xx} \cdot f_{yy} - f^2_{xy} .$$

Então temos que :

1º : Se $H(x, y) > 0$ então :
a) se $f_{xx} < 0$ ou $f_{yy} < 0$ em (x_o, y_o), a função possui **Máximo Local** ;
b) se $f_{xx} > 0$ ou $f_{yy} > 0$ em (x_o, y_o), a função possui **Mínimo Local** ;

2º : Se $H(x, y) < 0$ em (x_o, y_o), a função possui **Ponto de Sela** ;

3º : Se $H(x, y) = 0$ em (x_o, y_o), nada se pode concluir, sobre o ponto crítico.

EXERCÍCIO PROPOSTO : Seja a função $f(x, y) = 3xy^2 + x^3 - 3x$. Classifique os pontos críticos de f .

5. PONTOS CRÍTICOS PARA FUNÇÕES DE TRÊS VARIÁVEIS

Os conceitos de máximo e de mínimo de uma função de mais de duas variáveis em um domínio $D \subset \mathbb{R}^n$ podem ser definidos de modo análogo ao já apresentado no caso de duas variáveis.

Consideremos uma função de três variáveis $w = f(x, y, z)$ de classe C^2 em uma região $A \subset \mathbb{R}^3$. Os pontos críticos da função ocorrem em pontos nos quais se anulam todas as derivadas de 1ª ordem da função, ou seja, se P é uma ponto crítico de f então :

$$f_x(P) = 0 ,\ f_y(P) = 0 \ \text{ e } \ f_z(P) = 0.$$

As condições acima nos dizem que P deve ser um ponto crítico da função. Elas não bastam para que exista **máximo** local ou **mínimo** local em P. Vamos então utilizar um teste semelhante ao utilizado para funções de duas variáveis. Com as derivadas de 2ª ordem da função formamos a matriz hessiana de f e suas submatrizes principais, ou seja :

$$H_1 = \begin{bmatrix} f_{xx} & f_{xy} & f_{xz} \\ f_{yx} & f_{yy} & f_{yz} \\ f_{zx} & f_{zy} & f_{zz} \end{bmatrix} \quad H_2 = \begin{bmatrix} f_{xx} & f_{xy} \\ f_{yx} & f_{yy} \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad H_3 = [\, f_{xx} \,] .$$

Calculamos os determinantes das matrizes acima no ponto P, então podemos afirmar que :

1º : se $\det. H_1 > 0$, $\det. H_2 > 0$ e $H_3 > 0$, então P é ponto de mínimo local ;

2º : se $\det. H_1 < 0$, $\det. H_2 > 0$ e $H_3 < 0$, então P é ponto de máximo local

EXERCÍCIO PROPOSTO : Seja a função $h(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 - xy + 3x - 2z$. Encontre os possíveis pontos críticos e classifique-os.

OBSERVAÇÃO : Podemos utilizar a teoria desenvolvida para pesquisar pontos extremos também para funções definidas implicitamente.

LISTA DE EXERCÍCIOS

1. Determine os extremos das funções abaixo:

a) $f(x, y) = x^2 - 4xy + y^3 - 4y$

b) $f(x, y) = x^2 + 2xy + 3y^2$

c) $f(x, y) = \frac{1}{5}x^5 - x + \frac{1}{5}y^5 - 16y$

d) $z = x^2 + xy + y^2 - 5x - 4y + 10$

e) $z = x^2 + y^2 - 4x - 6y + 5$

f) $z = x^2y(a - x - y)$

g) $x^3 - y^2 - 3x + 4y + z^2 + z - 8 = 0$

h) $w = x^2 + (y - 3)^2 + (z + 1)^2$

2. Encontre os extremos da função $g(x, y) = x^2 + y^2 - 2x - 2y$, na superfície triangular situada no 1º quadrante de vértices A(0, 0) ; B(3, 0) e C(0, 3).

3. Deve-se construir uma caixa retangular sem tampa de $12m^3$ de volume, O custo do material a ser utilizado é de R$ 0,40 por metro quadrado para o fundo, R$ 0,30 por metro quadrado para um par de lados opostos e R$ 0,20 para o outro par de lados opostos. Determine as dimensões da caixa que minimizem o custo.

4. Determine a menor distância do ponto P(2, 1, – 1) ao plano $4x - 3y + z = 5$.

5. Encontre o máximo e mínimo absoluto de $f(x, y) = 2 + 2x + 2y - x^2 - y^2$ na superfície triangular situada no primeiro quadrante e delimitada pelas retas $x = 0$, $y = 0$ e $y = 9 - x$.

R. 4 e – 61

6. Uma empresa produz dois tipos de tênis : calçados de corrida e calçados de basquete. A receita total de x unidades de calçados de corrida e y unidades de calçados de basquete é :

$$R = -5x^2 - 8y^2 - 2xy + 42x + 102y$$ em que x e y estão em milhares de unidades.

Determine x e y de modo a maximizar a receita .

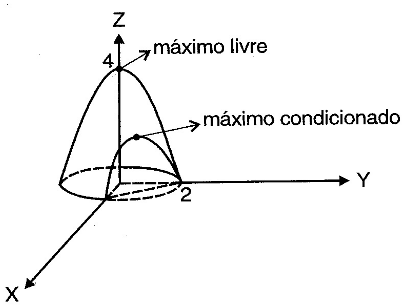
7. Suponha que para a produção de lingotes de alumínio em uma determinada fábrica requer x máquinas-hora e y homens-hora, o custo de produção seja dado por $f(x, y) = 2x^3 - 6xy + y^2 + 500$. Determine o números de máquinas-hora e o número de homens hora necessários para que a produção tenha custo mínimo ?

MÁXIMOS E MÍNIMOS RESTRITOS

1. INTRODUÇÃO

Consideremos uma função f de duas variáveis, com domínio D. Se restringirmos o domínio aos pontos (x, y) que satisfazem uma dada relação g(x, y) = 0 e procurarmos entre esses pontos os de **Máximo** e de **Mínimo**, dizemos que este é um problema de máximos e mínimos de f condicionados à restrição g(x, y) = 0.

É importante observar que o ponto de Máximo (ou de Mínimo) condicionado não coincide necessariamente com o ponto de Máximo (ou Mínimo) da função f definida em D.



Para resolver problemas desse tipo podemos utilizar o **Método dos Multiplicadores de Lagrange**.

2. MÉTODO DOS MULTIPLICADORES DE LAGRANGE

O método dos multiplicadores de Lagrange considera que os valores extremos de uma função f(x, y), cujas variáveis estão sujeitas a restrições do tipo g(x, y) = 0 ou h(x, y) = 0, etc., devem situar-se sobre uma superfície g = 0 ou h = 0, nos pontos em que $\vec{\nabla} f = \lambda \cdot g$ ou $\vec{\nabla} f = \mu \cdot h$, para escalares λ ou μ quaisquer denominados **Multiplicadores de Lagrange**.

Então supondo que f(x, y), g(x, y) e h(x, y) possuem derivadas contínuas para achar os valores Máximos e Mínimos locais de f, sujeitos às restrições g(x, y) = 0 e h(x, y) = 0, basta determinarmos x , y, λ e μ capazes de satisfazer simultaneamente as equações :

$$\vec{\nabla} f = \lambda \cdot g, \quad g(x, y) = 0, \quad h(x, y) = 0 \ \text{ e } \ \vec{\nabla} f = \mu \cdot h.$$

As condições acima podem ser reescritas de um modo mais simples, ou seja :

$L = f(x, y) - \lambda \cdot g(x, y)$, pois as equações do sistema acima é equivalente à $\vec{\nabla} L = 0$ ou $L_x = 0$, $L_y = 0$ e $L_\lambda = 0$.

EXERCÍCIOS PROPOSTOS

1. Encontre os pontos críticos da função $f(x, y) = 25 - x^2 - y^2$, sujeita à restrição $x^2 + y^2 - 4y = 0$.

R. (0, 0) e (0, 4)

2. Um galpão retangular deve ser construído num terreno com a forma de um triângulo retângulo cujos catetos medem 10m e 20m . Determinar a área máxima possível para o galpão.

R. 50 m²

LISTA DE EXERCÍCIOS

1. Determinar os pontos de máximo e/ou mínimo da função dada sujeita às restrições indicadas.

a) $z = 2x + y$; s.a : $x^2 + y^2 = 4$ b) $z = 4 - 2x - 3y$; s.a : $x^2 + y^2 = 1$

c) $g(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$; s.a : $3x - 2y + z - 4 = 0$

d) $H(x, y\ z) = x^2 + y^2 + z^2$; s.a : $x + 2y + 3z = 6$ e $x - y - z = 1$

2. Se $f(x, y, z) = 4x^2 + y^2 + 5z^2$, determine o ponto do plano $2x + 3y + 4z = 12$ em que $f(x, y, z)$ tem mínimo.

R. (5/11, 30/11, 8/11)

3. Denotemos por C o arco, no primeiro octante, da curva em que o parabolóide $2z = 16 - x^2 - y^2$ intercepta o plano $x + y = 4$. Determine os pontos de C mais próximos e mais afastados da origem. Determine a maior e a menor distância da origem a C.

R. $2\sqrt{6}$; $\sqrt{15}$

4. A reta **t** é dada pela interseção dos planos $x + y + z = 1$ e $2x + 3y + z = 6$. Determinar o ponto de **t** cuja distância até a origem seja mínima.

5. Determine o ponto da esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 9$ mais próximo do ponto P(2, 3, 4).

6. O departamento de Estradas de Rodagem deseja uma área de recreação ao longo de uma estrada. A área, retangular, terá $5000m^2$ e será cercada nos três lados não adjacentes à estrada. Qual é o mínimo de cerca necessário para a tarefa ?

R. 200 metros

7. Quais serão as medidas de uma lata cilíndrica de $54cm^3$ de volume que pode ser construída usando-se o mínimo possível de metal.

R. 3cm ; 2cm

8. De todos os triângulos que tem o mesmo perímetro, achar aquele que possui área máxima.

9. Uma bóia deve ter a forma de um cilindro terminado em dois cones iguais e de mesmas base que o cilindro. Achar as dimensões do cilindro e dos cones para que o material encontrado seja mínimo.

10. Achar a distância mínima da origem ao plano $x + y + z = a$.

11. Achar a equação do plano que passa pelo ponto P(1, 2, 1) e determina com os planos coordenados o tetraedro de volume mínimo.

R. $2x + y + 2z = 0$

12. Encontre três números cuja soma seja 9 e a soma de seus quadrados seja a menor possível.

R. $x = y = z = 3$

13. Uma sonda espacial com a forma do elipsóide $4x^2 + y^2 + 4z^2 = 16$ penetra na atmosfera terrestre e sua superfície começa a aquecer. Após uma hora, a temperatura em um ponto $P(x, y, z)$ da superfície da sonda é $T(x, y, z) = 8x^2 + 4yx - 16z + 600$. Determine o ponto mais quente da superfície da sonda.

14. Utilize os multiplicadores de Lagrange para encontra a menor distância entre o ponto $P(1, 3, 0)$ e o plano $4x + 2y - z = 5$.

15. Um disco circular é a região limitada pela circunferência $x^2 + y^2 = 1$. Se T graus for a temperatura em qualquer ponto do disco e $T = 2x^2 + y^2 - y$, encontre o ponto mais que e mais frio do disco.

16. A temperatura T em um ponto qualquer do espaço é $T = 400xyz^2$. Determine a temperatura mais alta sobre a esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 1$.

R. 50

17. Um recipiente cilíndrico deverá ter um volume de 4π cm^3 . O custo(por cm^2) de fabricação da tampa e da base de metal é o dobro do custo do restante do recipiente, feito de cartolina grossa. Quais são as dimensões do recipiente mais barato ?

R. 1cm ; 4 cm

INTEGRAIS DUPLAS

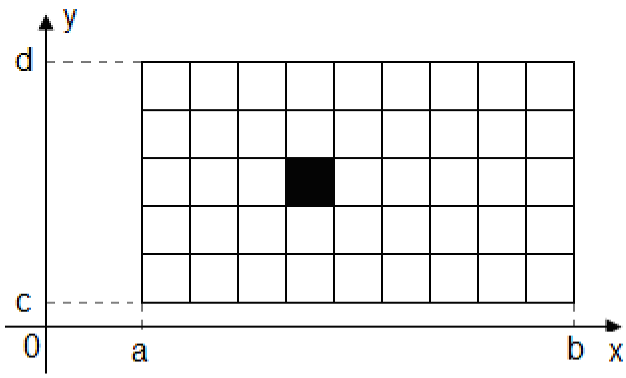
1. DEFINIÇÃO

Admitamos que $f(x, y)$ seja definida em uma região retangular R definida por R: $a \leq x \leq b$, $c \leq y \leq d$.

Imaginamos R coberta por uma rede formada por retas paralelas aos eixos x e y. Tais retas dividem R em pequenos retângulos de área $A = \Delta x \cdot \Delta y$.

Ordenamos estes elementos segundo determinada ordem $\Delta A_1, \Delta A_2, \Delta A_3, \ldots, \Delta A_n$, escolhemos um ponto (x_k, y_k) de cada retângulo A_k e formamos a soma

$$S_n = \sum f(x_k, y_k) \cdot \Delta A_k$$



Se f for contínua em R, então a medida que estreitamos a malha de modo que x e y tendam a zero, os somatórios S_n tendem para um limite denominado **Integral Dupla** de f sobre a região R designado por :

$$\iint_R f(x,y)dA \quad \text{ou} \quad \iint_R f(x,y)dxdy \quad \text{ou} \quad \iint_R f(x,y)dydx$$

Assim temos que :

$$\iint_R f(x,y)dA = \lim_{\Delta A \to 0} \sum f(x, y)\, \Delta A_k$$

2. PROPRIEDADES DA INTEGRAL DUPLA

As integrais duplas possuem as mesmas propriedades que as integrais simples, ou seja :

1ª : $\iint_R k.f(x,y)dA = k \cdot \iint_R f(x,y)dA$, onde k é uma constante.

2ª : $\iint_R [f(x,y) + g(x,y)]\, dA = \iint_R f(x,y)dA + \iint_R g(x,y)dA$

3ª : $\iint_R f(x,y)dA \geq 0$, se $f(x, y) \geq 0$ em R

$4^a : \iint_R f(x,y)dA \leq \iint_R g(x,y)dA$ dA , se $f(x, y) \leq g(x, y)$ em R.

$5^a : \iint_R f(x,y)dA = \iint_{R_1} f(x,y)dA + \iint_{R_2} f(x,y)dA$, onde $R = R_1 + R_2$, onde R_1 e R_2 são retângulo não superpostos.

Quando $f(x, y) > 0$, podemos interpretar $\iint_R f(x,y)dA$ como volume do sólido contido por R, os planos $x = a$, $x = b$, $y = c$ e $y = d$ e a superfície $z = f(x, y)$

3. CÁLCULO DE INTEGRAIS DUPLAS

O cálculo das integrais duplas é feito através de duas integrações sucessivas, dependendo do tipo da região de integração, para isto utiliza-se o seguinte teorema(Teorema de Fubini) :

3.1 – TEOREMA : Seja $f(x, y)$ contínua em uma região R.

a) Se R for definida por $a \leq x \leq b$, $g_1(x) \leq y \leq g_2(x)$, com g_1 e g_2 contínuas em (a, b), então :

$$\iint_R f(x,y)dA = \int_a^b \int_{g_1(x)}^{g_2(x)} f(x, y)dydx$$

b) Se R for definida por $c \leq y \leq d$, $g_1(y) \leq x \leq g_2(y)$, com g_1 e g_2 contínuas em (c, d), então :

$$\iint_R f(x,y)dA = \int_c^d \int_{g_1(y)}^{g_2(y)} f(x, y)dxdy$$

EXERCÍCIOS PROPOSTOS

1. Calcule $\iint_R (4 - x - y)dydx$ e $R: 0 \leq x \leq 2,\ 0 \leq y \leq 1$.

R. 5

2. Calcule $\iint_R f(x,y)dA$ para $f(x, y) = 1 - 6x^2y$ e $R: 0 \leq x \leq 2,\ -1 \leq y \leq 1$

R. 4

3.2 – DETERMINAÇÃO DOS LIMITES DE INTEGRAÇÃO

A parte mais difícil do cálculo de uma integral dupla pode ser a determinação dos limites de integração, então podemos utilizar o seguinte método. Suponhamos, que a primeira integração seja em relação a y e, depois em relação a x , seguimos os seguintes passos :

1º : Imaginamos uma reta vertical (L) que cruze toda a região R no sentido dos y crescentes ;

2º : Integramos a partir do valor de y correspondente ao ponto em que a reta (L) penetra em R, até o valor de y correspondente ao ponto em que L abandona a região R ;

3º Escolhemos os limites de x que incluam todas as retas verticais que passem por R .

EXERCÍCIOS PROPOSTOS

1. Encontre o volume do prisma cuja base é o triângulo no plano xy , limitado pelo eixo-x e as retas $y = x$ e $x = 1$. Na parte superior, o sólido é limitado pelo plano $z = 3 - x - y$.

R. 1

2. Seja R a região do plano xy delimitada pelos gráficos $y = x^2$ e $y = 2x$. Calcule o volume do sólido limitado superiormente, pela função $F(x, y) = x^3 + 4y$.

4. ÁREA

Se fizermos $f(x, y) = 1$ na definição de integral dupla sobre uma região R, então a integral representará a área da região, ou seja :

$$A = \iint_R f(x,y)dA \quad .$$

EXERCÍCIOS PROPOSTOS

1. Determine a área da região R limitada por $y = x$ e $y = x^2$, no primeiro quadrante.

R. 1/6

2. Determine a área da região R limitada pela parábola $y = x^2$ e pela reta $y = x + 2$.

R. 9/2

3. Seja $G(x, y) = 100(y + 1)$ que representa a densidade populacional de uma região plana da Terra. Calcule a população dessa região, onde x e y são medidos e,m quilômetros e a região é limitada pelas curvas $x = y^2$ e $x = 2y - y^2$.

5. MUDANÇA DE VARIÁVEIS EM INTEGRAIS DUPLAS

Na integração de funções de uma variável, a fórmula de mudança de variável ou substituição é utilizada para transformar uma integral dada em outra mais simples.

Suponhamos que desejamos fazer a mudança de variáveis, da integral dupla da função $f(x, y)$, onde $x = x(u, v)$ e $y = y(u, v)$ sobre uma região R do plano xy, para uma região R' do plano uv , onde $u = u(x, y)$ e $v = v(x, y)$.

Considerando que as funções x, y, u e v são contínuas, com derivadas parciais contínuas em R_1 e R respectivamente, temos :

$$\iint_R f(x,y)\,dx\,dy = \iint_{R_1} f[x(u,v),y(u,v)]\left|\frac{\partial\ (x,y)}{\partial\ (u,v)}\right| du\,dv \text{ , onde :}$$

$$\frac{\partial\ (x,y)}{\partial\ (u,v)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix}$$ é o **jacobiano** de **x** e **y** em relação a **u** e **v** .

EXERCÍCIO PROPOSTO : Calcular a integral dupla da função $f(x, y) = x - y$, sendo R o paralelogramo limitado pelas retas $x - y = 0$, $x - y = 1$, $y = 2x$ e $y = 2x - 4$.

R. 2

6. INTEGRAL DUPLA EM COORDENADAS POLARES

A regra para conversão de uma integral em coordenadas cartesianas em uma integral em coordenadas polares é :

a) Substituir $x = r \cdot \cos\theta$, $y = r \cdot \operatorname{sen}\theta$ e $dydx = r \cdot dr \cdot d\theta$.
b) Estabelecer os limites polares de integração do seguinte modo :
   I – Mantemos θ constante e permitimos que **r** cresça, de forma a traçar um raio a partir da origem.
   II – Integramos em relação a **r**, a partir do valor de (r) correspondente ao ponto em que o raio penetra na região R , até o ponto em que ele a abandona
   III – Escolhemos limites de θ que incluam todos os raios com pólo na origem e que interceptam R.

EXERCÍCIOS PROPOSTOS

1. Calcule a integral $\iint_R \sqrt{x^2 + y^2}\, dx\, dy$, sendo R o círculo de centro na origem e raio 2 .

R. $\frac{16\pi}{3}$

2. Calcule a integral $\iint_R e^{x^2 + y^2}\, dx\, dy$, sendo R a região do plano xy delimitada por $x^2 + y^2 = 4$ e $x^2 + y^2 = 9$.

R. $\pi (e^9 - e^4)$

3. Calcule a $\iint_R f(x,y)\,dx\,dy$ onde $f(x, y) = (x - 2)^2 + (y - 2)^2$, onde R é a região delimitada pela circunferência $(x - 2)^2 + (y - 2)^2 = 4$

R. 8π

7. APLICAÇÕES FÍSICAS

Assim como utilizamos a integral definida para calcular a **massa**, **centro de massa** e o **momento de inércia** de uma barra horizontal não homogênea com densidade linear $\rho = \rho(x)$, podemos utilizar as integrais duplas, de modo bastante semelhante para encontrar **massa**, **centro de massa** e o **momento de inércia** de uma lâmina plana não homogênea, com a forma de uma região R e com densidade de área em um ponto P(x, y) de R dada pela função contínua $\rho = \rho(x, y)$.

7.1 – MASSA TOTAL DE UMA LÂMINA

Para encontrarmos a massa total de uma lâmina podemos utilizar a integral :

$$M = \iint_R \rho(x, y)\, dA \,.$$

7.2 – MOMENTO DE MASSA EM RELAÇÃO AOS EIXOS COORDENADOS

Para calcularmos os momentos de massa em relação aos eixos coordenados utilizamos as integrais :

$$M_x = \iint_R y\rho(x, y)\, dA \quad \text{e} \quad M_y = \iint_R x\rho(x, y)\, dA$$

Então as coordenadas do centro de massa da lâmina é dado por :

$$\bar{x} = \frac{M_y}{M} \quad \text{e} \quad \bar{y} = \frac{M_x}{M}$$

7.3 – MOMENTO DE INÉRCIA

Podemos dizer que o momento de inércia de um corpo é a capacidade do corpo resistir à aceleração angular em torno de um eixo L .

Para encontrarmos os momentos de inércia utilizamos as integrais :

$$I_x = \iint_R y^2\rho(x, y) \rightarrow \text{Momento de inércia em relação ao eixo x ;}$$

$$I_y = \iint_R x^2\rho(x, y) \rightarrow \text{Momento de inércia em relação ao eixo y ;}$$

$$I_o = \iint_R (x^2 + y^2)\rho(x, y) \rightarrow \text{Momento de inércia polar ;}$$

EXERCÍCIO PROPOSTO : Determinar o centro de massa de uma chapa homogênea formada por um quadrado de lado **2a**, encimado por um triângulo isósceles que tem por base o lado **2a** do quadrado e por altura **a** .

LISTA DE EXERCÍCIOS

1. Calcule as integrais duplas abaixo :

a) $\iint_R (4 - y^2)dA$, onde R : $0 \le x \le 3$ e $0 \le y \le 2$.

R. 16

b) $\iint_R (\text{sen} x + \cos y)dA$, onde R : $0 \le x \le \pi$ e $0 \le y \le 2\pi$.

R. 4π

c) $\iint_R y \, dA$, onde R : $0 \le x \le \pi$ e $0 \le y \le \text{sen}\, x$.

R. $\pi / 4$

d) $\iint_R dx\,dy$, onde R : $y \le x \le y^2$ e $1 \le y \le 2$.

R. 5/6

2. Calcular $\iint_R f(x, y)dxdy$, onde :

a) $f(x, y) = x\,e^{xy}$; R é o retângulo $1 \le x \le 3$ e $0 \le y \le 1$.

R. $e^3 - e - 2$

b) $f(x, y) = x \cdot \cos xy$; R é o retângulo $0 \le x \le 2$ e $0 \le y \le \pi/2$.

R. $4 / \pi$

3. Resolva os problemas abaixo :

a) $\iint xy\, dA$, sobre a região do 1º quadrante limitada pelas retas $y = x$, $y = 2x$, $x = 1$ e $x = 2$.

R. 45/8

b) Encontre o volume do sólido cuja base é a região do plano xy formada pela parábola $y = 4 - x^2$ e pela reta $y = 3x$, sendo a parte superior do sólido limitado pelo plano $z = x + 4$.

R. 625/2

c) Determine a área determinada pela parábola $x = y - y^2$ e pela reta $x + y = 0$.

R. 4/3

d) $\iint dA$, onde R : $-a \le x \le a$ e $-\sqrt{a^2 - x^2} \le y \le \sqrt{a^2 - x^2}$

R. πa^2

e) Calcule a área da superfície da parte do parabolóide hiperbólico $z = xy$ no círculo $x^2 + y^2 = 1$.

R. $\pi/2$

4. Achar o volume do tronco de um prisma limitado pelos planos : $3x + 2y + z = 18$, $x = 3$, $y = 4$ e os três planos coordenados.

R. 114

5. Calcular a área da superfície compreendida entre as curvas : $x^2 + y^2 = 25$ e $9y = 4x^2$.

6. Calcule as integrais abaixo :

a) $\int_2^3 \int_{-1}^2 (2x + 3y + 6)dxdy$ b) $\int_0^b \int_0^a (x + y)dxdy$ c) $\int_0^2 \int_0^\infty e^{-x}dxdy$

d) $\int_1^e \int_1^e \frac{dxdy}{x.y}$ e) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} (a.\cos\theta + b\operatorname{sen}2\theta)d\theta dy$

R. $\frac{87}{2}$; $\frac{1}{2}$ab(a + b) ; 2 ; 1 ; $\frac{1}{2}$ π b

7. Calcular $\iint_R x^2y^2dxdy$, onde R é o círculo $x^2 + y^2 \leq 1$.

R. $\pi/24$

8. Calcular $\iint_R (x^2 + y^2)dxdy$, onde R é o setor $x = 0$, $y = 0$, $x^2 + y^2 = a^2$.

R. $\pi a^2 / 8$

9. Calcular a área da região compreendida entre a parábola $x^2 + 8y = 16$ e a reta $4y = 3x$.

R. 125/6

10. Calcular $\iint_R (x^2 + y^2)dxdy$, onde R é o círculo $x^2 + y^2 \leq 4$.

R. 4π

11. Determine o valor médio da função $f(x , y) = 3y$, sobre o triângulo cujos vértices são : A(0, 0) ; B(4, 0) e C(2,2).

R. 2

12. Supondo que a função densidade de probabilidade conjunta para as variáveis não negativas x e y seja $h(x, y) = x \cdot e^{-x} \cdot e^{-y}$, determine a probabilidade de $0 \leq x \leq 1$ e $0 \leq y \leq 2$.

R. 0,2285

13. Calcular o volume do sólido no 1º octante delimitado por $y + z = 2$ e pelo cilindro que contorna a região delimitada por $y = x^2$ e $x = y^2$.

R. 31/60

14. Calcular o momento de inércia em relação ao eixo dos y de uma chapa que possui a forma dada pela função $y = \sqrt{x}$, no intervalo [0, 4] e sabendo que a sua densidade de massa é igual a $x \cdot y$ kg / m^2 .

15. Uma lâmina tem a forma do triângulo de vértices (– 1, 0) , (1, 1) e (1, – 1) . Determinar a massa e o centro de massa da lâmina se a sua densidade de massa é constante .

16. Uma lâmina tem a forma de uma região plana R delimitada pelas curvas $x = y^2$ e $x = 4$. Sua densidade de massa é constante .

a) Determinar o momento de inércia da lâmina em relação ao eixo dos x ;

b) O momento de inércia da lâmina em relação ao eixo dos y .

17. Calcular o centro de massa de uma lâmina plana quadrada de 4 cm de lado, com densidade de massa constante .

18. Uma lâmina plana tem a forma da região delimitada pelas curvas $y = x^2 + 1$ e $y = x + 3$. Sua densidade de massa no ponto P(x, y) é proporcional à distância desse ponto ao eixo dos x . Calcular :

a) a massa da lâmina ;

b) o centro de massa

c) o momento de inércia em relação ao eixo x

INTEGRAIS TRIPLAS

1. INTEGRAIS TRIPLAS EM COORDENADAS RETANGULARES

Se $F(x, y, z)$ for uma função definida em uma região fechada D do espaço (p.ex. numa esfera maciça, num tronco de cone , etc.), então a integral de F sobre D pode ser dividida do modo descrito a seguir. Subdividimos uma região retangular de D em células retangulares elementares mediante planos paralelos aos coordenados. As células têm dimensões $\Delta x \,.\, \Delta y \,.\, \Delta z$. Numeramos tais elementos de volume segundo uma determinada ordem :

$\Delta V_1, \Delta V_2, \ldots, \Delta V_n$, escolhemos um ponto (x_k, y_k, z_k)em cada ΔV_k e formamos a soma :

$$S_n = \sum F(x_k, y_k, z_k) \,.\, \Delta V_k.$$

Se F for contínua e a superfície envolvente de D for constituída de trechos suaves de superfícies, unidos ao longo de curvas contínuas, então quando Δx , Δy , Δz aproximam-se de Zero, o somatório S_n tende para um limite :

$$\lim S_n = \iiint_D F(x_k, y_k, z_k) . \Delta V_k \; dV$$

Denominamos tal limite **Integral Tripla** de F sobre D. Esse limite existirá, igualmente, para algumas funções descontínuas.

2. PROPRIEDADES

As integrais triplas possuem as seguintes propriedades :

1ª : $\iiint_D k.F dV = k \,.\, \iiint_D F dV$, onde k = constante   2ª : $\iiint_D (F+G) dV = \iiint_D F dV + \iiint_D G dV$

3ª : $\iiint_D F dV \geq 0$, se $F \geq 0$ em D   4ª : $\iiint_D F dV \leq \iiint_D G dV$, se $F \leq G$ em D

5ª : $\iiint_D F dV = \iiint_{D_1} F dV + \iiint_{D_2} F dV + \iiint_{D_3} F dV + \ldots + \iiint_{D_n} F dV$.

3. VOLUME

Podemos utilizar uma integral tripla para calcular o volume de um sólido, para isto basta fazer $F(x, y, z) = 1$, então a integral $\iiint_D dV$ representará o volume de D.

3. 1 – CÁLCULO

Para calcular uma integral tripla, utiliza-se uma versão tridimensional do teorema utilizado para calcular as integrais duplas, ou seja, calculamos três sucessivas integrais simples.

EXERCÍCIO PROPOSTO : Calcular o volume do sólido delimitado inferiormente por $z = 3 - \dfrac{y}{2}$, superiormente por $z = 6$ e lateralmente pelo cilindro vertical que contorno a região R delimitada por $y = x^2$ e $y = 4$.

R. 224/5

4. APLICAÇÕES FÍSICAS

De maneira semelhante ao que foi feito com integrais duplas, podemos utilizar as integrais triplas para determinar a massa de um corpo, as coordenadas de seu centro de massa e o momento de inércia em relação a um eixo L .

4.1 – MASSA TOTAL DE UMA LÂMINA

Para encontrarmos a massa total de um corpo podemos utilizar a integral :

$$M = \iiint_T \delta(x, y, z)\, dV .$$

4.2 – MOMENTO DE MASSA EM RELAÇÃO AOS EIXOS COORDENADOS

Para calcularmos os momentos de massa em relação aos eixos coordenados utilizamos as integrais :

$$M_{xy} = \iiint_T z\,.\delta\,(x, y, z).\, dV \;,\quad M_{xz} = \iiint_T y\,.\delta\,(x, y, z).\, dV \quad e \quad M_{yz} = \iiint_T x\,.\delta\,(x, y, z).\, dV$$

Então as coordenadas do centro de massa da lâmina é dado por :

$$\bar{x} = \frac{M_{yz}}{M} \;,\; \bar{y} = \frac{M_{xz}}{M} \;\; e \;\; \bar{z} = \frac{M_{xy}}{M} \;.$$

4.3 – MOMENTO DE INÉRCIA

Podemos dizer que o momento de inércia de um corpo é a capacidade do corpo resistir à aceleração angular em torno de um eixo L .

Para encontrarmos os momentos de inércia utilizamos as integrais :

$$I_x = \iiint_T (y^2 + z^2)\delta\,(x, y, z)\, dV \rightarrow \text{Momento de inércia em relação ao eixo x ;}$$

$$I_y = \iiint_T (x^2 + z^2)\delta\,(x, y, z) \rightarrow \text{Momento de inércia em relação ao eixo y ;}$$

$$I_z = \iiint_T (x^2 + y^2)\delta\,(x, y, z) \rightarrow \text{Momento de inércia em relação ao eixo z ;}$$

EXERCÍCIOS PROPOSTO

1. Calcular a massa e o centro de massa do sólido T , delimitado por $2x + y + z = 1$ e os planos coordenados, sabendo que a densidade de massa em P(x, y, z) é proporcional a distância até o plano xy .

2. Encontrar o momento de inércia em relação ao eixo z do sólido delimitado pelo cilindro $x^2 + y^2 = 9$ e pelos planos $z = 2$ e $z = 4$, sabendo que a densidade de massa é igual a $(x^2 + y^2)\ kg/m^3$.

LISTA DE EXERCÍCIOS

1. Calcule as seguintes integrais triplas :

a) $\iiint\limits_D F\,dV$, onde $F(x, y, z) = xy^2z^3$ e $D : 0 \le x \le 2$, $0 \le y \le 3$, $0 \le z \le 1$.

R. 9/2

b) $\iiint\limits_D (5x + yz)\,dV$, onde $D : 0 \le x \le 1$, $0 \le y \le x$, $0 \le z \le x^2 + y^2$

R. 17/12

c) $\iiint\limits_D (x + 2y + 3z)\,dV$, onde $D : 0 \le x \le 2$, $1 \le y \le 3$, $0 \le z \le 3$.

R. 120

2. Calcule $\iiint\limits_D z\,dV$, onde D é um prisma reto de base triangular e altura igual a 7, sendo

A(1, 0, 0), B(3, 2, 0) e C(1, 2, 0).

R. 49

3. Calcule $\iiint\limits_D xyz\,dV$, onde $D : x^2 + y^2 + z^2 \le 4$, $y > 0$ e $z > 0$.

R.

4. Calcule $\iiint\limits_D z.\rho\,.\text{sen}\,\theta\;dV$, onde D é a região do espaço (ρ, θ, z) determinada pelas desigualdades $0 \le z \le 3$, $0 \le \rho \le 2$ e $0 \le \theta \le \pi$.

R. 18

5. Calcule as integrais abaixo :

a) $\int_{-3}^{3}\int_{0}^{1}\int_{1}^{2}(x + y + z)dxdyd$ b) $\int_{0}^{a}\int_{0}^{b}\int_{0}^{c}(x^2 + y^2 + z^2)dxdydz$ c) $\int_{0}^{1}\int_{y^2}^{1}\int_{0}^{1-x} xdzdydx$

R. 12 ; $\dfrac{1}{3}$ abc($a^2 + b^2 + c^2$) ; $\dfrac{4}{35}$

6. Achar o volume do sólido compreendido entre as superfícies $y^2 + z^2 = x$ e $x = y$, $z > 0$.

R. $\dfrac{\pi}{32}$

7. Achar o volume do sólido limitado pelos cilindros $x^2 + y^2 = a^2$ e $y^2 + z^2 = a^2$ no 1º octante.

R. $\dfrac{2}{3}\,a^3$

8. Achar o volume do sólido limitado pela superfície $x^{2/3} + y^{2/3} + z^{2/3} = a^{2/3}$.

R. $\dfrac{4}{35}\pi a^3$

9. Calcular o volume do sólido delimitado por $x^2 + y^2 = 4$, $z = 0$ e $4x + 2y + z = 16$.

R. 64π

10. Calcular o volume da parte do tetraedro $3x + 6y + 2z = 6$.

a) entre os planos $z = 1$ e $z = 2$ b) acima do plano $z = 1$

R. $\dfrac{2}{27}$; $\dfrac{8}{27}$

11. Calcule o volume do sólido delimitado pelas superfícies $x^2 + y^2 = 16$; $z = 2$ e $x + z = 9$.

R. 112π

12. Calcule $\iiint\limits_D x\,dV$, onde $D : 0 \le x \le 1$; $0 \le y \le x$ e $0 \le z \le x + y$.

R. 3/8

13. Calcular a massa dos sólidos limitados pelas superfícies dadas considerando a densidade de massa iguala a $4\ kg / m^3$.

a) $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ b) $z = 4 - x^2 - y^2$

14. Calcular o momento de inércia em relação aos eixos coordenados do sólido delimitado por $z = 4 - x^2 - y^2$ e $z = 0$, sabendo que a densidade de massa em um ponto P é proporcional a distância de P ao plano xy .

15. Um sólido no primeiro octante é limitado abaixo pelo plano $z = 0$, lateralmente pelos planos $y = 0$ e pela superfície $x = y^2$ e , acima, pela superfície $z = 4 - x^2$. A densidade é $\delta(x, y, z) = kxy$, onde **k** é uma constante.

COORDENADAS POLARES

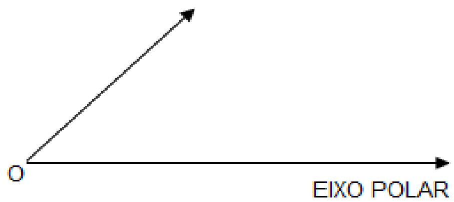
1. INTRODUÇÃO

Até agora, sempre que foi preciso representamos curvas planas como coleções de pontos (x, y) em um sistema de **coordenadas cartesianas**, onde x e y representam as distâncias orientadas dos eixos coordenados ao ponto (x, y) . As equações correspondentes para essas curvas podem ser dadas nas formas **cartesianas** e **paramétrica**. Nesta unidade vamos conhecer um outro sistema de co-ordenadas, o **Sistema de Coordenadas Polar**.

2. SISTEMA DE COORDENADAS POLARES

Para formar o sistema de coordenadas polares no plano, fixamos um ponto (O), chamado de **pólo**(origem) e construímos a partir do pólo um raio inicial, denominado **eixo polar**.

DEFINIÇÃO : As coordenadas de um ponto P diferente da origem(pólo), num plano xy, são (r, θ), onde **r** é a distância de P à origem e **θ** é um ângulo formado pelo eixo dos x positivos com a reta entre a origem e P.



Para marcar um ponto em coordenadas polares, utilizaremos as seguintes convenções :

a) Se o ângulo AOP for descrito no sentido anti-horário, então $\theta > 0$. Caso contrário, temos $\theta < 0$.

b) Se $r < 0$, o ponto estará localizado na extensão do lado terminal do ângulo AOP.

EXERCÍCIOS PROPOSTOS : Representar num sistema cartesiano de coordenadas polares os seguintes pontos :

a) $P_1(3, \pi / 6)$ b) $P_2(-3, \pi / 6)$ c) $P_3(-3, -\pi / 6)$ d) $P_4(3, -\pi / 6)$

3. RELAÇÃO ENTRE COORDENADAS CARTESIANAS E COORDENADAS POLARES

As definições de **Seno** e **Cosseno** em um triângulo retângulo cujos catetos medem(**x** e **y**) e a hipotenusa(**r**) nos dão as equações :

$\mathbf{x = r \cdot \cos\theta}$ e $\mathbf{y = r \cdot sen\,\theta}$, que exprimem as coordenadas retangulares (x, y) de um ponto em termos de suas coordenadas polares (r , θ). A equação que exprime **r** em função de **x** e **y** é :

$$r = \sqrt{x^2 + y^2} .$$

LISTA DE EXERCÍCIOS

1. Supondo $0 \leq \theta \leq 2\pi$, encontre as coordenadas polares dos pontos abaixo :

a) A(– 3, 3) b) B(7, 0) c) C(– 1, $\sqrt{3}$) d) D(3, 4)

2. Escreva as equações abaixo, em coordenadas polares :

a) $x = 2$ b) $x = 3y$ c) $x^2 - y^2 = 1$ d) $2x^2 + y^2 = 1$

3. Escreva as equações abaixo, em coordenadas retangulares :

a) $r = \sec\theta$ b) $r = -3\operatorname{cossec}\theta$

c) $r^2 = \cos\theta \, . \, \operatorname{sen}\theta$ d) $r = \dfrac{6}{2 - \cos\theta}$

4. Faça o gráfico das equações dadas em coordenadas polares.

a) $r = 2$ b) $\theta = \dfrac{\pi}{3}$ c) $r = \sec\theta$ d) $r = 4 \, . \, \operatorname{sen}\theta$

Respostas :

2. a) $r = 2 \, . \, \sec\theta$ b) $\operatorname{cotg}\theta = 3$

c) $r^2 = \sec 2\theta$ d) $1 - r^2 = r^2 . \operatorname{tg}^2\theta$

3. a) $x = 1$ b) $y + 3 = 0$

c) $(x^2 + y^2)^2 = x \, . \, y$ d) $3x^2 + 4y^2 + 12x - 36 = 0$

BIBLIOGRAFIA CONSULTADA

EDWARDS, C. Henry e **PENNEY**, David E. – **CÁLCULO COM GEOMETRIA ANALÍTICA .** 4ª Edição. Rio de Janeiro **.** Editora Prentice – Hall do Brasil Ltda **.** 1997 **.** volumes 02 e 03

GONÇALVES, Míriam Buss e **FLEMMING**, Diva Marília – **CÁLCULO B : Funções de Várias Variáveis.** 1ª Edição. São Paulo **.** Editora Makron **.** 1999

GUIDORIZZI, Hamilton Luiz – **UM CURSO DE CÁLCULO .** 1ª Edição **.** Rio de Janeiro **.** Editora LTC **.** 1986 **.** volumes 02 e 03

HOFFMANN, Laurence D. – **CÁLCULO : UM CURSO MODERNO E SUAS APLICAÇÕES .** 2ª Edição **.** Rio de Janeiro **.** Editora LTC **.** 1990 **.** volume 02

JUDICE, Edson Durão – **FUNÇÕES DE VÁRIAS VARIÁVEIS .** 1ª Edição **.** Belo Horizonte **.** PUC/M.G **.** 1987

KAPLAN, Wilfred – **CÁLCULO AVANÇADO .** 1ª Edição **.** 7ª Reimpressão **.** São Paulo **.** Editora Edgard Blucher Ltda **.** 1999 **.** volume 01

SWOKOWSKI, Earl W. **CÁLCULO COM GEOMETRIA ANALÍTICA**. 1ª Edição. São Paulo, Editora MAKRON, 1983, v. 2

THOMAS, George ; **FINNEY**, Ross L. **CÁLCULO E GEOMETRIA ANALÍTICA** . 6ª Edição. São Paulo, Editora LTC ,1988, São Paulo, volume 03